دانشکده فنی و مهندسی دانشگاه مازندران

عنوان درس: آب های زیرزمینی پیشرفته

Advanced Groundwater

تحلیل جریان آب زیرزمینی (معادله عمومی جریان در آبخوان های تحت فشار و آزاد، کاربرد معادله جریان در حل مسائل جریان ماندگار یک بعدی، کاربرد معادله جریان در حل مسائل جریان غیرماندگار یک بعدی، تئوری پتانسیل و شبکه های جریان، جریان دوبعدی ماندگار)

مدرس: دکتر محمود محمد رضاپور طبری

دانشیار گروه مهندسی عمران

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

حل تحلیلی مسائل جریان

جهت بررسی رفتار زمانی و مکانی تراز سطح آب زیرزمینی ($h(x,y,z,t)$) لازم است معادله عمومی جریان مورد حل قرار گیرد.

با استفاده از مشتق گیری از h، ($\frac{dh}{dx}$) و معلوم بودن مقدار هدایت هیدرولیکی، امکان تعیین سرعت جریان بر اساس رابطه دارسی فراهم می شود. سایر پارامترهایی که امکان محاسبه آن ها با استفاده از معلوم بودن h، فراهم می شود، عبارتند از:

- دبی جریان (با معلوم بودن مشخصات هندسی سطح مقطع جریان)
- سرعت حقیقی (سرعت تراوش) در محیط متخلخل (با مشخص بودن میزان تخلخل مؤثر)
- تعیین رفتار حرکت آلاینده ها در آبخوان با محاسبه سرعت حقیقی جریان

به طور معمول برای محیط های همگن، همسان و جریان یک بعدی، امکان حل تحلیلی معادله عمومی جریان آب زیرزمینی وجود دارد. اما در سیستم های پیچیده آبخوان لازم است از روش های عددی همانند روش تفاضل محدود (Finite difference) و یا روش اجزای محدود (Finite element) استفاده شود. همچنین برای محیط های متخلخلی که مرزهایش یا محورهای مختصات هم سو و ضرایب معادلات حاکم در آن ثابت باشد، می توان جواب های تحلیل بدست آورد.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

جهت حل ریاضی مسائل آب های زیرزمینی لازم است مراحل زیر انجام شود:

۱) تعیین یک معادله ی مناسب برای توصیف جریان آب در مسأله مورد مطالعه

۲) تعیین حدود حوزه یا منطقه ای که باید معادله ی مذکور برای آن حل گردد.

۳) تعیین مقادیر ضرایب موجود در معادله ی حاکم بر جریان در منطقه مورد مطالعه

۴) تعیین شرایط جریان در سرتاسر مرزهای منطقه مورد نظر (شرایط مرزی)

۵) تعیین مقادیر مجهول در لحظه ی شروع محاسبه (زمان صفر) برای حالتی که جریان ناپایدار باشد (شرایط اولیه)

۶) تعیین وجود منابع تولید (Source) یا مصرف (Sink) در حوزه ی جریان

۷) حل معادله حاکم با یک روش تحلیلی یا عددی و تعیین مجهول (در مسائل آب های زیرزمینی معمولاً بار هیدرولیکی h مجهول می باشد)

با تعیین بار هیدرولیکی در هر سلول از آبخوان، توزیع بار هیدرولیکی (خطوط تراز) در منطقه مورد بررسی تعیین می شود.

یک خط تراز بار هیدرولیکی، مکان هندسی نقاطی است که دارای بار هیدرولیکی برابر هستند. با داشتن نقشه خطوط تراز بارها می توان جهت و آرایش جریان را در منطقه مورد مطالعه بدست آورد.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=S_s\frac{\partial h}{\partial t}+W$$

تعیین توزیع مکانی ضرایب

دو ضریب ذخیره ویژه و هدایت هیدرولیکی باید قبل از حل معادله تعیین گردند. این ضرایب باید برای هر نقطه از منطقه جریان تعیین شوند.

ساده ترین راه عملی این است که فرض شود مقدار این ضرایب برای تمام نقاط واقع در منطقه ثابت است و از این رو برای هر یک از آنها یک مقدار ثابت برای کل نقاط واقع در منطقه تعیین می گردد. در محیط های متخلخل طبیعی (واقعی) مقدار این ضرایب در نقاط مختلف محیط ثابت نبوده و مقادیر آنها در مکان های مختلف متفاوت می باشد. اندازه ای که باید تغییرات مکانی این ضرایب در توصیف سامانه، منظور گردد به مقیاس طولی حجم معرف (RVE) به کار رفته برای تعیین معادلات و نیز ملاحظات عملی مانند (اهداف تحلیل و داده های موجود) بستگی دارد.

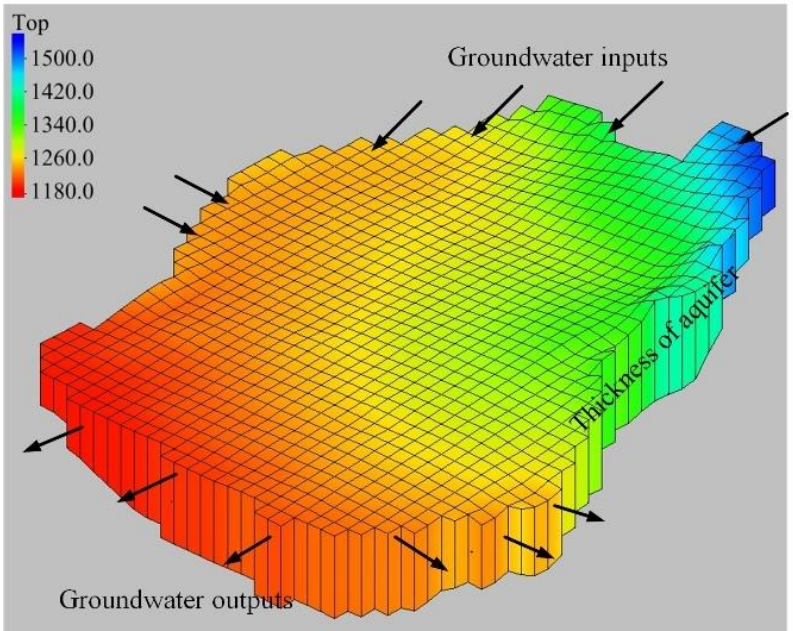
به طور کلی در نظر گرفتن تغییرات مکانی ضرایب S و K، مستلزم استفاده از نوعی درون یابی است که بتوان اطلاعات را از داده های نقطه ای محدود به تمام حوزه جریان گسترش داد.

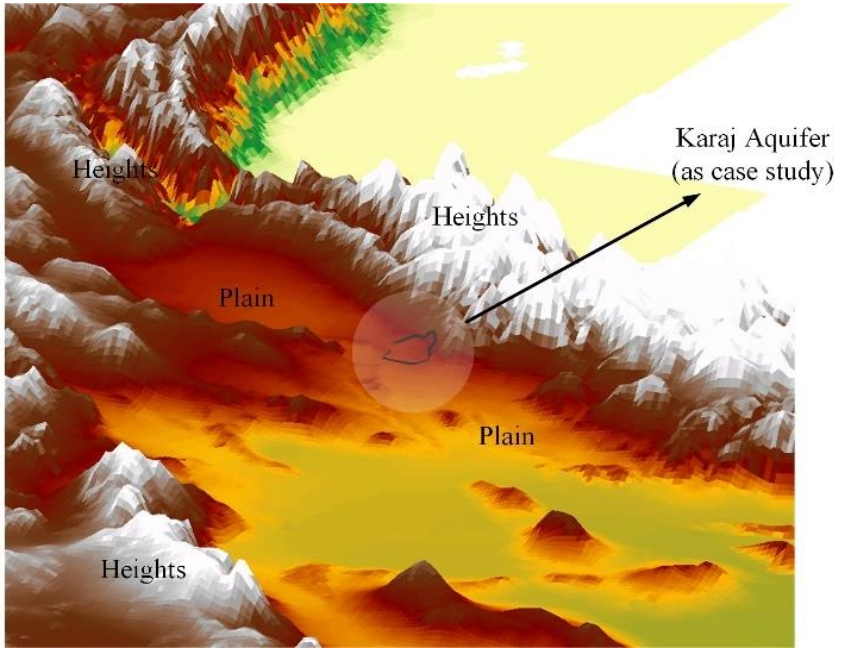
شرایط مرزی

شرایط جریان بر روی مرزهای حوزه یا منطقه مورد مطالعه، شرایط مرزی نامیده می شود. منطقه مورد مطالعه بخش کوچکی از یک سامانه هیدرولوژیکی بزرگ است که برای هدف خاص و تحلیل جزئیات جریان انتخاب می شود. بدیهی است شرایط خارج از حوزه می تواند بر آنچه که در داخل حوزه می گذرد، تأثیر بگذارد.

نقش شرایط مرزی آن است که:

- به معادلات حاکم بر جریان گفته شود ناحیه قلمرو آنها برای شبیه سازی جریان، محدود است.
- چگونه اطلاعات بیرون از حوزه به داخل آن منتقل می شود.





انواع شرایط مرزی

- اگر مدل دو بعدی باشد باید شرایط مرزی برای یک خط تک بعدی دورتادور محیط حوزه مشخص شوند.
- در مدل سه بعدی، شرایط مرزی باید در امتداد یک سطح دو بعدی که حدود حوزه جریان را مشخص می نماید، تعیین گردند.

معمولاً مرز را با علامت $\partial\Gamma$ نشان می دهند. شرایط مرزی در جریان آبهای زیرزمینی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه ی دوم شامل سه نوع استاندارد زیر است:

۱) شرایط مرزی نوع اول: شرط مرزی دیریچلت (Dirichlet boundary condition) یا بار ثابت است. این شرط مرزی مقدار بار هیدرولیکی h را در یک مرز تعیین می کند. به زبان ریاضی شرط مرزی دیریچلت به صورت زیر بیان می شود:

$$h(x,y,z,t) = h_0(x,y,z,t) \qquad ,(x,y,z) \in \partial\Gamma$$

که در آن $h_0(x,y,z,t)$ مقدار ثابت تعیین شده بار هیدرولیکی در مرز $\partial\Gamma$ است. از دید فیزیکی یک رودخانه یک دریاچه یا هر مکان دیگری که بار هیدرولیکی در آن ثابت و معلوم باشد، می تواند به عنوان یک مرز با بار ثابت هیدرولیکی به حساب آید.

۲) شرایط مرزی نوع دوم: شرط مرزی نوع دوم، شرایط مرزی نیومن (Neumann boundary condition) است. این شرط مرزی سرعت جریان آب (دبی ویژه) را در یک مرز مشخص می کند. به زبان ریاضی شرط مرزی نیومن به صورت زیر بیان می شود:

$$V_n = V_0(x,y,z,t) \qquad ,(x,y,z) \in \partial\Gamma$$

$$V_n = V_0(x, y, z, t) \quad , (x, y, z) \in \partial\Gamma$$

که در آن: n: بردار عمود بر مرز و جهت آن رو به خارج است. V_n: سرعت دارسی خروجی و V_0: سرعت دارسی تعیین شده خروجی بر روی مرز $\partial\Gamma$ است.

شرایط مرزی نیومن را می توان به صورت زیر که عبارتی برای دبی جریان در امتداد مرز است، ارائه نمود:

$$Q_n = Q_0(x, y, z, t) \quad , (x, y, z) \in \partial\Gamma$$

که در آن: Q_n: نرخ جریان خروجی و Q_0: نرخ جریان خروجی تعیین شده در مرز است.

نمونه هایی از شرط مرزی نیومن:

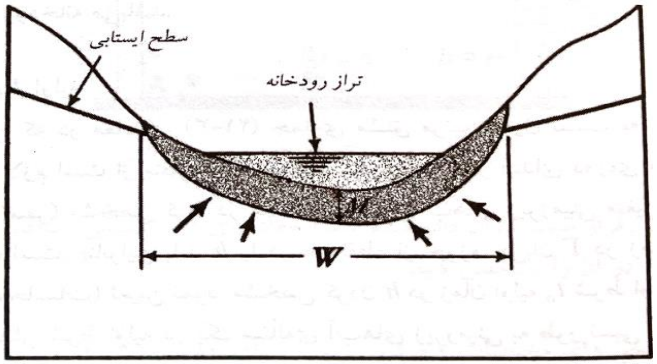
- ✓ محلی واقع در بالای آبخوان که از آن جا تغذیه آب به آبخوان و یا تخلیه آب از آبخوان صورت می گیرد.
- ✓ دبی ثابت یک چاه تزریقی (تغذیه) یا دبی ثابت یک چاه برداشت را می توان به عنوان شرط مرزی داخلی از نوع نیومن منظور نمود. بدیهی است در چنین حالتی، دیواره چاه به عنوان مرز به حساب می آید.
- ✓ مرزی که در آن جریانی وجود ندارد ($V_n = 0$) حالت خاصی از شرط مرزی نیومن است چنین وضعیتی را می توان در حد بین یک آبخوان و یک لایه با نفوذ پذیری خیلی کم (یا لایه غیر قابل نفوذ) یا در مقسم های آب زیرزمینی و مرزهای امتداد خطوط جریان که در آن جا جریانی عمود بر خط جریان وجود ندارد، مشاهده نمود.

۳) شرایط مرزی نوع سوم: شرط مرزی نوع سوم، شرط مرزی کوشی (Cauchy boundary condition) است. این نوع شرط مرزی، بار هیدرولیکی را به شار جریان آب مرتبط می سازد. می توان شرط مرزی کوشی را به صورت زیر نوشت:

$$V_n = \frac{K_n}{M}[h(x,y,z,t) - h_m(x,y,z,t)] \quad , \quad (x,y,z) \in \partial\Gamma$$

$$Q_n = C_m[h(x,y,z,t) - h_m(x,y,z,t)] \quad , \quad (x,y,z) \in \partial\Gamma$$

که در آن، V_n: سرعت دارسی خروجی، Q_n: نرخ جریان خروجی، K_n: هدایت هیدرولیکی مرز و M: ضخامت مرز است.



h: بار هیدرولیکی در داخل مرز، h_m: بار هیدرولیکی در خارج مرز و C_m: توانائی مرز برای عبور آب است و از رابطه زیر بدست می آید:

$$C_m = \frac{AK_n}{M}$$

A: سطح مقطع جریان است.

یک مثال برای استفاده از شرایط مرزی کوشی، تعامل بین آبخوان و رودخانه است. مطابق شکل فوق، آب از آبخوان و از طریق بستر وارد رودخانه می شود. سرعت دارسی از آبخوان به رودخانه عبارت است از:

$$V_n = \frac{K_m}{M}(h - h_m)$$

و دبی جریان از آبخوان به رودخانه عبارت است از:

$$Q_n = LW\frac{K_m}{M}(h - h_m)$$

K_m: هدایت هیدرولیکی بستر رودخانه، L: طول بستر رودخانه، W: عرض بستر رودخانه، M: ضخامت بستر رودخانه، h: بار هیدرولیکی در آبخوان و h_m: تراز سطح آب در رودخانه

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=S_s\frac{\partial h}{\partial t}+W$$

شرایط اولیه(Initial condition)

با توجه به اینکه در معادله عمومی جریان آب زیرزمینی، جمله مشتق مرتبه اول بار هیدرولیکی نسبت به زمان ($\frac{\partial h}{\partial t}$) وجود دارد بنابراین لازم است از منظر ریاضی وضعیت سامانه را در ابتدای دوره محاسبات و تحلیل (زمان صفر) مشخص کرد.

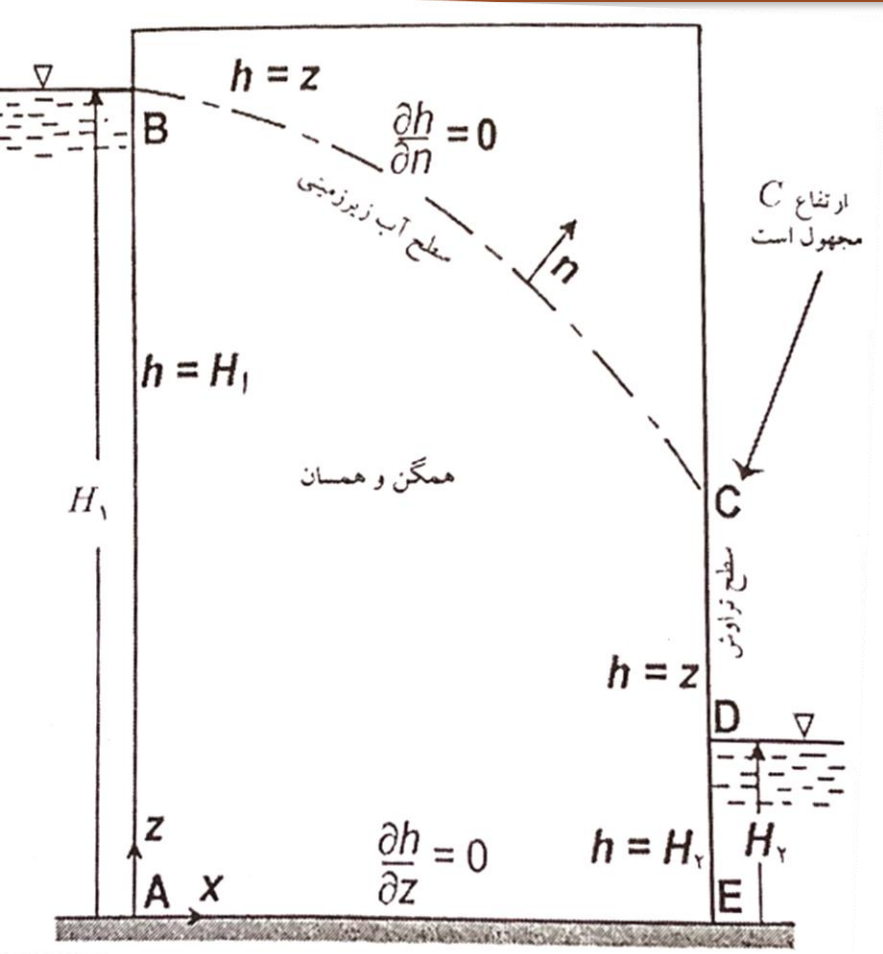
در معادلات جریان آبهای زیرزمینی، متغیر وابسته، بار هیدرولیکی است. لذا باید h را در هر نقطه از حوزه جریان Γ در زمان اولیه (t_0) (زمان شروع محاسبات) تعیین نمود. مشخص کردن h در زمان اولیه t_0، شرط اولیه نام دارد.

نمونه های از شرایط اولیه:

- به عنوان مثال، توزیع مکانی بار هیدرولیکی در ابتدای دوره مدلسازی (به عنوان مثال مهر ۱۴۰۲) به چه صورت است؟
- پراکنش مکانی غلظت نیترات در ابتدای دوره شبیه سازی چگونه است؟

به طور کلی نقش شرط اولیه در یک مسأله آب های زیرزمینی به طور نسبی جزئی است. دلیل این امر آن است که در مسائل عملی، بار هیدرولیکی سریعاً با شرایط مرزی حوزه تعدیل می شود. به علت این که سامانه سریعاً از حالت اولیه به یک وضعیت تقریباً ثابت متعادل با شرایط مرزی می رسد، غالباً می توان از جمله مشتق زمانی صرف نظر نمود و شکل حالت پایدار آن را که شامل تمام جملات به جز جمله مشتق زمانی است، برای تحلیل بکار برد.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)



مثال) در شکل مقابل، سطح مقطع مستطیلی یک سد خاکی که جریان پایدار آب در داخل آن برقرار است، نشان داده شده است. معادله دیفرانسیلی حاکم بر جریان و شرایط مرزی در آن را مشخص نمائید.

حل)

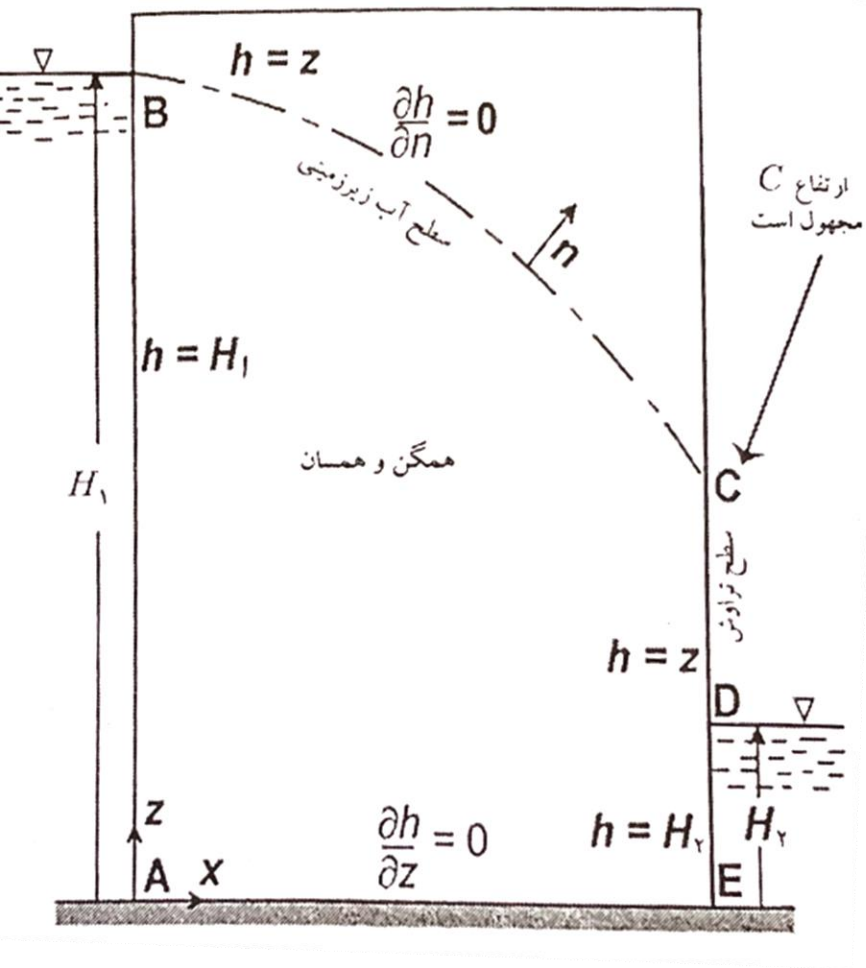
فرض کنید محورهای مختصات X و Z به ترتیب برای جهت های افقی و قائم انتخاب شده اند. معادله دیفرانسیلی حاکم بر جریان در داخل بدنه عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y h \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z h \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_y \frac{\partial h}{\partial t} + W$$

چون جریان پایدار و همگن و همسان است، رابطه عمومی جریان آب زیرزمینی به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h \frac{\partial h}{\partial z}\right) = 0$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

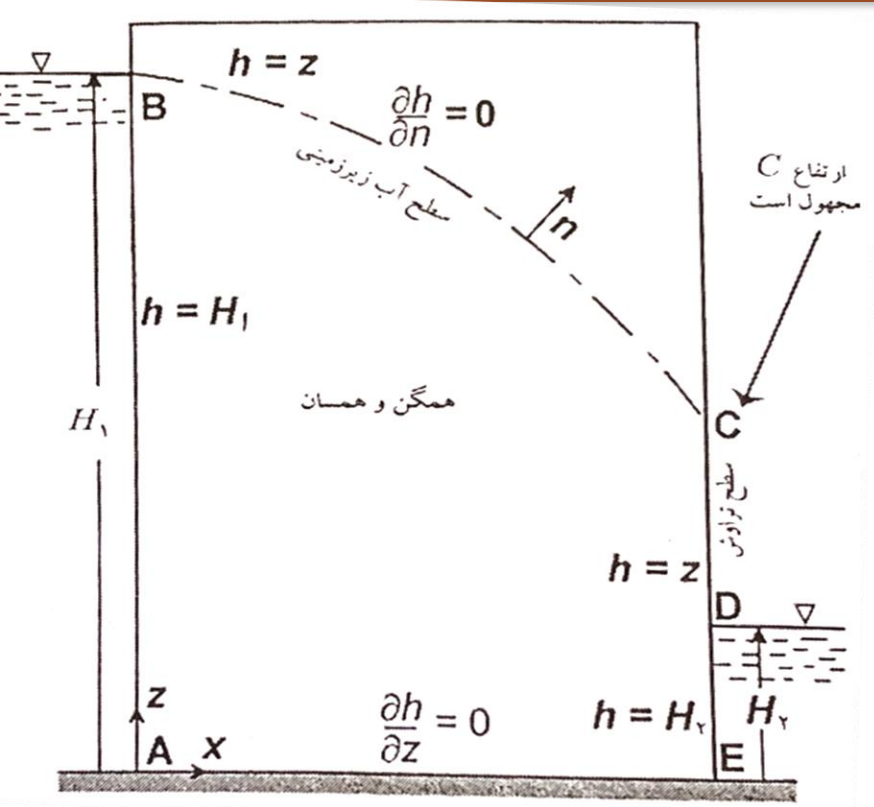


توجه به شکل، ۵ نوع مرز دیده می شود که باید شرایط مرزی برای آن ها تعیین شود.

۱) مرز AB: این مرز وجه بالادست سد است. در این مرز بار هیدرولیکی ثابت است. در نقطه A، بار فشار H_1 و $z = 0$ است ولی در نقطه B بار فشار صفر و $z = H_1$ می باشد. بنابراین برای تمام این مرز $h = H_1$ می باشد. (خط هم پتانسیل)

۲) مرز DE: این قسمتی از مرز وجه پایین دست سد است که در آن بار هیدرولیکی ثابت و $h = H_2$ می باشد. (خط هم پتانسیل)

۳) مرز AE: این قاعده سد و غیر قابل نفوذ است. به علت غیر قابل نفوذ بودن AE جریان در جهت z از آن نمی گذرد و بنابراین بر اساس قانون دارسی برای آن $\frac{\partial h}{\partial z} = 0$ می باشد. (خط جریان)



۴) مرز CD: در این قسمت از وجه پایین دست که در بالای سطح آب پایین دست قرار دارد، آب از بدنه ی سد خارج و بداخل هوا چکه می کند. مرز CD یک سطح تراوش است و در هر نقطه آن $H = Z$ است؛ زیرا در تمام نقاط آن فشار برابر با فشار هوا و برابر با صفر است. موقعیت انتهای پایین سطح تراوش نقطه (D) معلوم است اما ارتفاع انتهای بالای آن نقطه (C) نامعلوم است. در این مرز، خط سطح آب زیرزمینی (خط جریان) بر سطح تراوش عمود نیست؛ زیرا سطح تراوش یک خط هم پتانسیل نمی باشد.

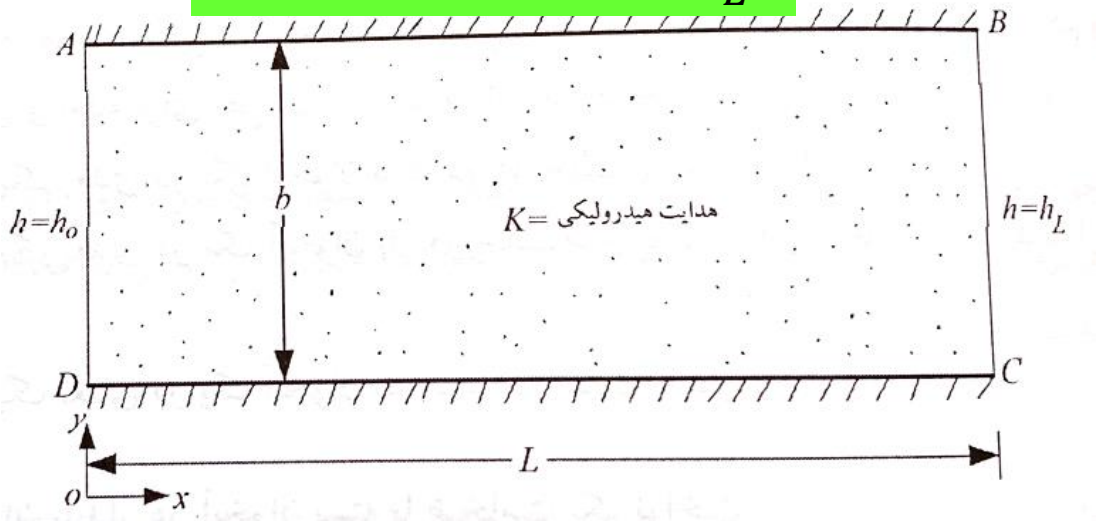
۵) مرز BC: این مرز که بالای وجه بالادست سد، یعنی نقطه B را به محل نامعلوم نقطه ی C در سطح تراوش وصل می کند، سطح آب زیرزمینی یا سطح آزاد است. BC مرز بالایی جریان در منطقه اشباع است. موقعیت نقطه C را نمی توان صریحاً تعیین نمود؛ زیرا محل آن به حرکت تمام ذرات آب در داخل آبخوان وابسته است. لذا محل سطح آب زیرزمینی نیز نامعلوم است. به علت نامعلوم بودن سطح آب زیرزمینی برای آن باید دو شرط مرزی تعریف کرد (برای مرزهائی که محل و موقعیت آنها معلوم است فقط یک شرط مرزی لازم است) این دو شرط عبارتند از:

- ✓ فشار در هر نقطه از سطح آب زیرزمینی برابر با فشار هوا و صفر است. بنابراین در هـر نقطه از سطح آب زیرزمینی $h = z$ است.
- ✓ هیچ جریانی سطح آب زیرزمینی را قطع نمی کند، لذا بنابراین $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$ عمود بر مرز است.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

مثال) شکل زیر منطقه ای از یک آبخوان بسته را نشان می دهد. مواد تشکیل دهنده آبخوان همگن و همسان با هدایت هیدرولیکی K می باشد. نوع شرایط مرزی را در مرزهای آن مشخص نمائید. اگر معادله ی حاکم بر جریان در این آبخوان معادله زیر باشد، نشان دهید که رابطه زیر جواب معادله است.

$$h(x,y) = h_0 - (h_0 - h_L)\frac{x}{L}$$



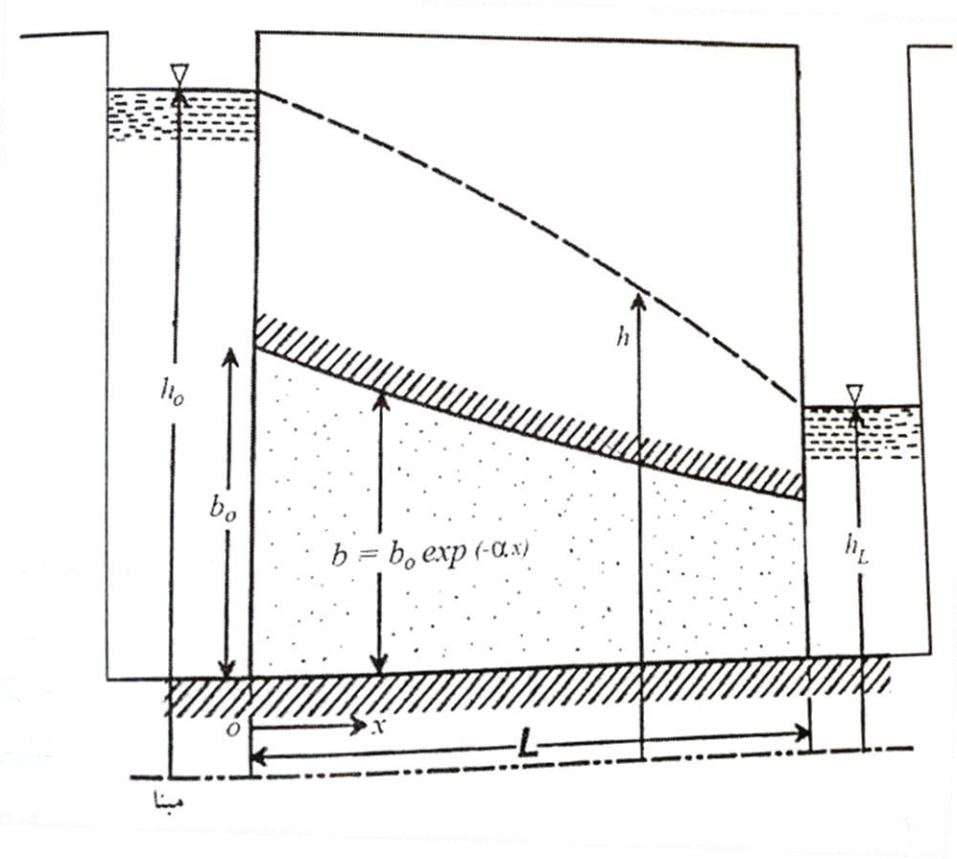
حل)

مرزهای AB و CD غیر قابل نفوذ هستند، بنابراین از آنها جریانی نمی گذرد ($V_n = 0$ یا $Q_n = 0$) این مرزها از نوع شرط مرزی نیومن هستند و می توان آن ها را خط جریان تلقی نمود.

در مرزهای AD و BC بارهای هیدرولیکی ثابت هستند (خطوط هم پتانسیل) و بنابراین از نوع شرط مرزی دیریچلت می باشند.

اگر جواب داده شده در معادله ($\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$) و شرایط مرزی مسأله صدق کند، جواب معادله است. با دوبار مشتق گیری نسبت به x و y از جواب داده شده، می توان دریافت که $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$. همچنین به ازای $x = 0, L$، مقدار بار هیدرولیکی به ترتیب برابر با h_0 و h_L است که منطبق بر شرایط مرزی تعریف شده در مسأله می باشد.

جریان پایدار در آبخوان بسته با ضخامت متغیر



مطابق شکل مقابل، آبخوان بسته ای بین دو نهر با ضخامت متغیر b نشان داده شده است. با توجه به متغییر بودن ضخامت آبخوان، استفاده از معادله لاپلاس در حالت یک بعدی یا هر معادله ی یک بعدی دیگر که در آن ضریب انتقال پذیری $T = bK$ ثابت فرض می شود، برای تحلیل جریان جایز نمی باشد. در چنین حالتی باید از معادله دیفرانسیلی که در آن تغییرات b یا T لحاظ می شود، استفاده نمود. معادله عمومی جریان آب زیرزمینی برای حالت پایدار یک بعدی به صورت زیر است:

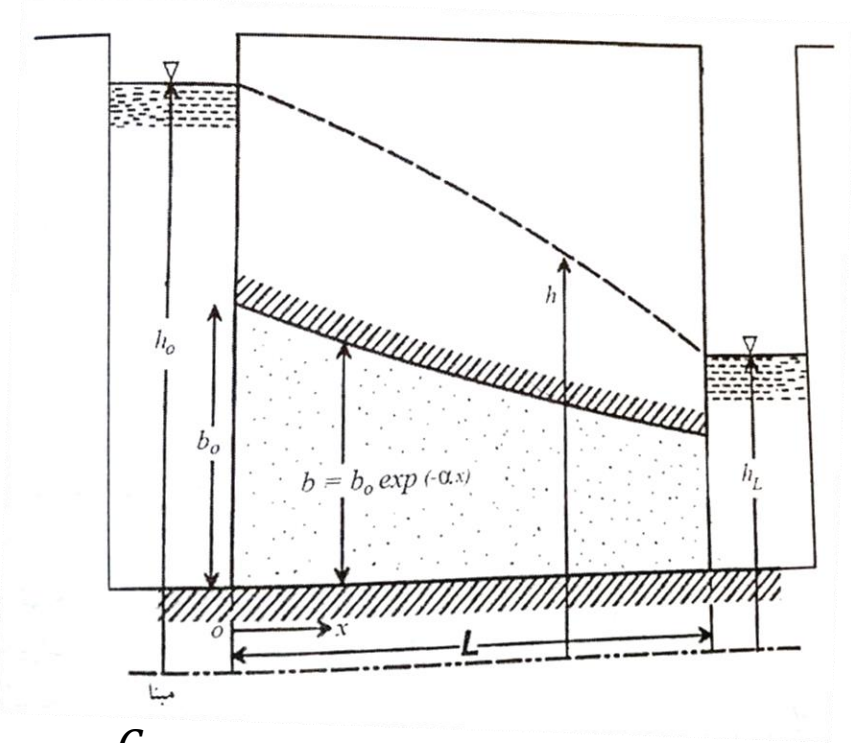
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x b \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K_y b \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K_z b \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S\frac{\partial h}{\partial t} + W$$

با توجه به ثابت بودن هدایت هیدرولیکی، رابطه مقابل به صورت زیر درخواهد آمد:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x b \frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T_x \frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(b \frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

با توجه به شرایط مرزی حاکم بر مسأله و با جایگزین نمودن مقدار $b = b_0 e^{-ax}$، می تواند مسئله را $\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$ به صورت تحلیل حل نمود.



شرایط مرزی مسأله:

$$\begin{cases} In\ x = 0 \Rightarrow h = h_0 \\ In\ x = L \Rightarrow h = h_L \end{cases}$$

با دوبار انتگرال گیری از رابطه زیر، می توان رابطه ریاضی تغییرات بار هیدرولیکی در این آبخوان را تعیین نمود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(b_0 e^{-ax}\frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

$$b_0 e^{-ax}\frac{\partial h}{\partial x} = C_1 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{C_1}{b_0}e^{ax}$$

$$h = \frac{C_1}{ab_0}e^{ax} + C_2$$

برای تعیین ثابت های انتگرال (C_1 و C_2)، از شرایط مرزی استفاده می شود:

$$\begin{cases} In\ x = 0 \Rightarrow h = h_0 = \frac{C_1}{ab_0} + C_2 \\ In\ x = L \Rightarrow h = h_L = \frac{C_1}{ab_0}e^{aL} + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{(h_0 - h_L)ab_0}{(1 - e^{aL})} \\ C_2 = h_0 - \frac{(h_0 - h_L)}{(1 - e^{aL})} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{h = h_0 - (h_0 - h_L)\left(\frac{e^{ax} - 1}{e^{aL} - 1}\right)}$$

با تعیین گرادیان هیدرولیکی ($\frac{\partial h}{\partial x}$) از رابطه ($\boldsymbol{h = h_0 - (h_0 - h_L)\left(\frac{e^{ax}-1}{e^{aL}-1}\right)}$) می توان سرعت جریان و بر مبنای قانون دارسی، دبی جریان در عرض واحد آبخوان را محاسبه نمود:

$$V = k\frac{\partial h}{\partial x} = ka(h_0 - h_L)\left(\frac{e^{ax}}{e^{aL}-1}\right)$$

$$q = AV = (b \times 1)ka(h_0 - h_L)\left(\frac{e^{ax}}{e^{aL}-1}\right) = (b_0 e^{-ax} \times 1)ka(h_0 - h_L)\left(\frac{e^{ax}}{e^{aL}-1}\right)$$

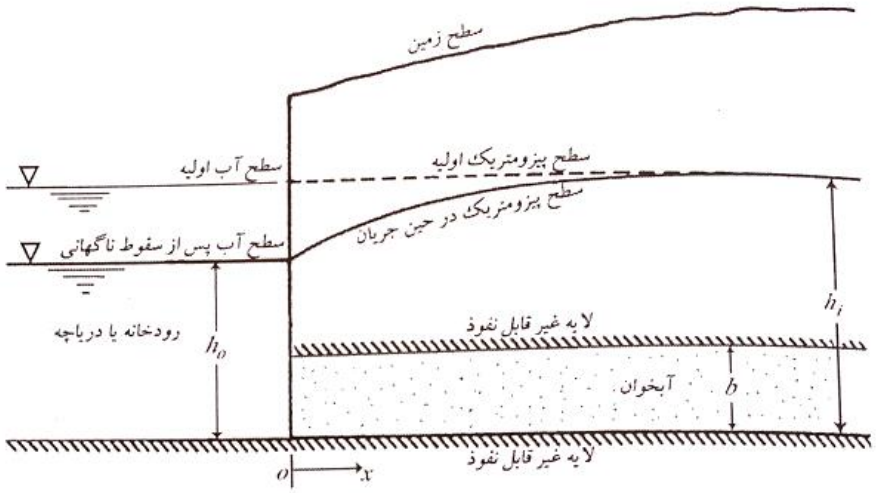
$$q = kab_0\left(\frac{h_0 - h_L}{e^{aL}-1}\right)$$

جریان ناپایدار در آبخوان بسته با ضخامت ثابت

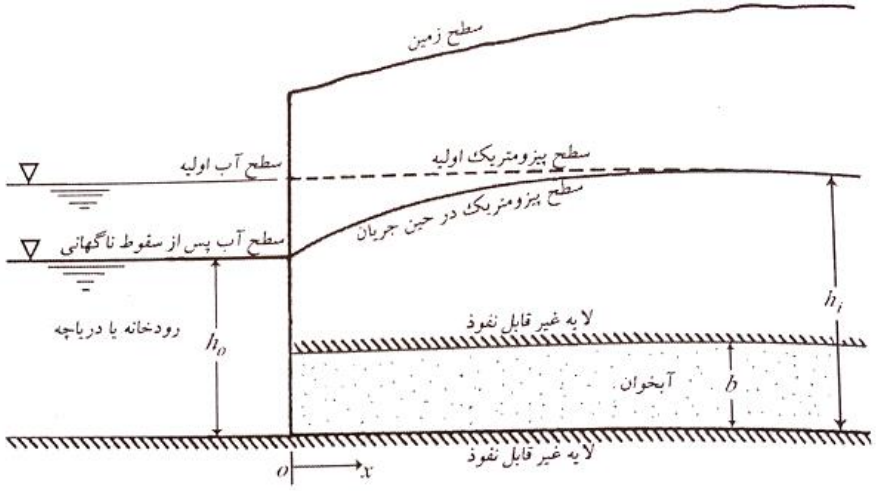
جریان های ناپایدار یک بعدی با حل معادله زیر تحت شرایط مرزی و اولیه مناسب بررسی می شوند:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S_s}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

تبادل آب بین یک آبخوان و رودخانه، دریا یا دریاچه در واکنش به تغییرات سطح آب و تغذیه آبخوان ها از کانال ها مثال های تقریبی جریان یک بعدی در حالت ناپایدار هستند.



تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)



در شکل مقابل، جریان از یک آبخوان ساحلی به دریاچه به صورت ساده نشان داده شده است. پایین افتادن ناگهانی سطح آب در دریاچه باعث برقراری جریان از آبخوان به سمت دریاچه شده است. شرایط مرزی و اولیه مربوط به یک مرحله تغییر سطح آب دریاچه در $t = 0$ به ترتیب عبارت است از:

شرایط مرزی $\begin{cases} h(0,t) = h_0 \\ h(\infty,t) = h_i \end{cases}$

شرایط اولیه $h(x,0) = h_i$

از شرط مرزی می توان دریافت که مرز سمت راست در بینهایت دور قرار دارد و بنابراین منطقه جریان یک منطقه نیمه محدود (نیمه بینهایت) است. مفهوم فیزیکی منطقه نیمه محدود آن است که مرز منطقه از یک طرف معین و از طرف دیگر نامحدود و در بینهایت دور قرار دارد مرز واقع در بینهایت بر جواب معادله تأثیری ندارد. در عمل بینهایت دور بودن مرز یک امر نسبی است و تا زمانی که مرز بر روی جریان در محیط تأثیری ندارد، می توان آن را دور تلقی نمود. به عنوان مثال اگر در یک ستون خاک محدود، جریان از یک طرف به طرف دیگر آن برقرار باشد تا زمانی که جبهه جریان تحت تأثیر طرف دیگر قرار نگرفته باشد، می توان جریان را در آن ستون نیمه محدود تلقی کرد.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

برای حل معادله، می توان با استفاده از تبدیل $\alpha = \frac{K}{S_s}$,$y = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$ آن را به معادله دیفرانسیلی معمولی زیر تبدیل نمود:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S_s}{K}\frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + 2y\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

با حل رابطه فوق تحت شرایط مرزی و اولیه داده شده، رابطه زیر حاصل می شود:

$$h(x,t) = h_i - (h_i - h_0)\left[1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right] = h_i - (h_i - h_0)erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

تابع خطا (Error function)

تابع خطا مکمل (Complimentary Error function)

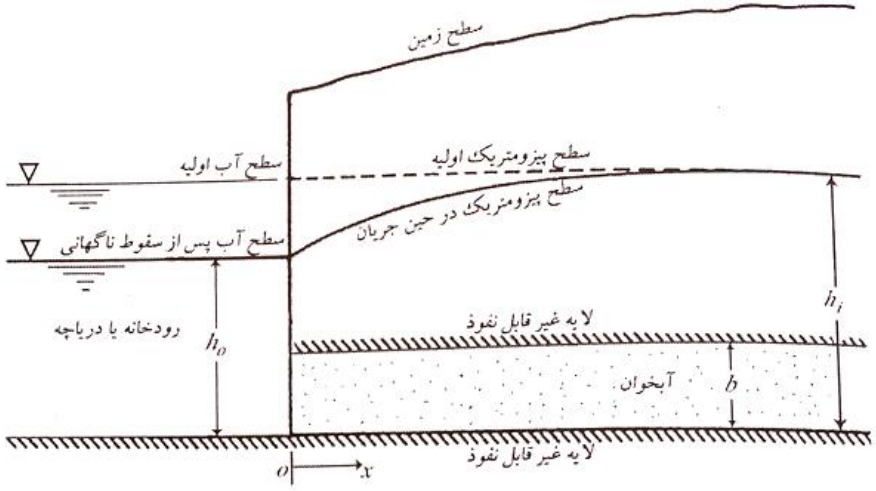
رابطه فوق برای آبخوان نیمه محدود استخراج شده است ولی برای آبخوان های محدود در مجاورت رودخانه یا دریاچه تا هنگامی که بتوان آبخوان محدود را نیمه محدود تلقی نمود، نیز کاربرد دارد. دبی جریان از آبخوان به دریاچه در عرض واحد از رابطه زیر بدست می آید:

$$q = -bk\left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=0} = -bk\left[-(h_i - h_0)\frac{d}{dy}\left(erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right)\frac{dy}{dx}\right] = \frac{bk(h_i - h_0)}{\sqrt{4\alpha t}}$$

$$\mathrm{q} = \frac{Ts_0}{\sqrt{4\alpha t}}$$

افت سطح پیزومتری در $x = 0$

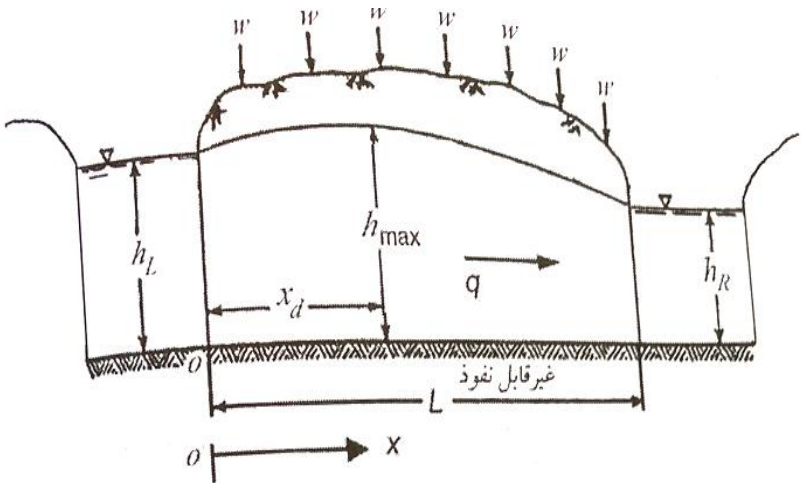
تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)



لازم به ذکر است رابطه بدست آمده برای حالتی است که در تراز سطح آب تغییر ناگهانی رخ داده باشد. غالباً یک چنین تغییر ناگهانی غیر واقعی است ولی با توجه تغییر به این که تغییرات بار هیدرولیکی در آبخوان در مدت زمان بسیار طولانی تری نسبت به تغییرات تراز سطح آب روخانه اتفاق می افتد، فرض ناگهانی بودن تغییر تراز سطح آب را می توان قابل قبول تلقی نمود.

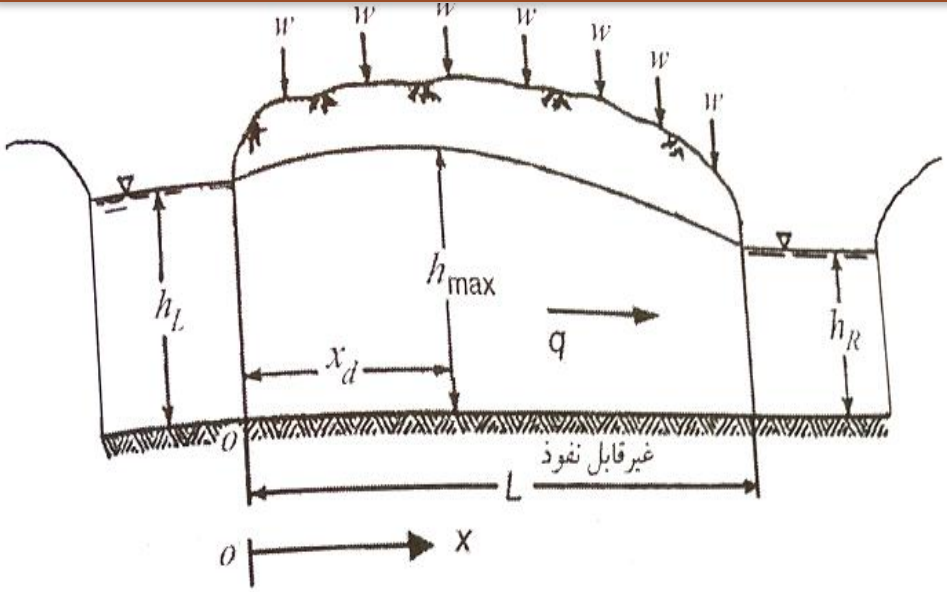
$$h(x,t) = h_i - (h_i - h_0)\left[1 - erf\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)\right] = h_i - (h_i - h_0)erfc\left(\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right)$$

جریان پایدار در آبخوان باز با تغذیه از بالا (روش اول)



یک آبخوان باز واقع بین دو کانال موازی که دائماً از بالا با نرخ ثابت W تغذیه می شود، مدنظر است. آبخوان همگن و کف آن لایه ای غیر قابل نفوذ است. بار هیدرولیکی در مرزهای $x = 0$ و $x = L$ معلوم است. هدف، یافتن رابطه ای برای بار هیدرولیکی h در هر نقطه از آبخوان به فاصله از مبدأ مختصات است.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)



مرز بالائی آبخوان سطح آب زیرزمینی است که محل آن به عنوان قسمتی از جواب حل مسأله باید تعیین گردد. اگرچه جریان در این مسأله دو بعدی است ولی غالباً با قبول فرضیات دوپوئی – فروشهایمر می توان معادله دو بعدی حاکم بر جریان را به صورت یک معادله تک بعدی مناسب در آورد. تحت شرایط جریان افقی و ناپایدار معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی به صورت رابطه زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial h}{\partial x}\right)+w=S_y\frac{\partial h}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{w}{K}=\frac{S_y}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

برای جریان پایدار، رابطه فوق به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)=-\frac{w}{K}\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{d^2h^2}{dx^2}=-\frac{w}{K}$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases}h(0,t)=h_L\\h(L,t)=h_R\end{cases}$$

جواب حل معادله فوق تحت شرایط مرزی ارائه شده، به صورت زیر است:

$$h^2=\frac{w}{K}x(L-x)+(h_R^2-h_L^2)\frac{x}{L}+h_L^2$$

بر اساس این رابطه می توان بار هیدرولیکی را در هر موقعیت x تعیین نمود.

$$h^2 = \frac{w}{K}x(L-x) + (h_R^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2$$

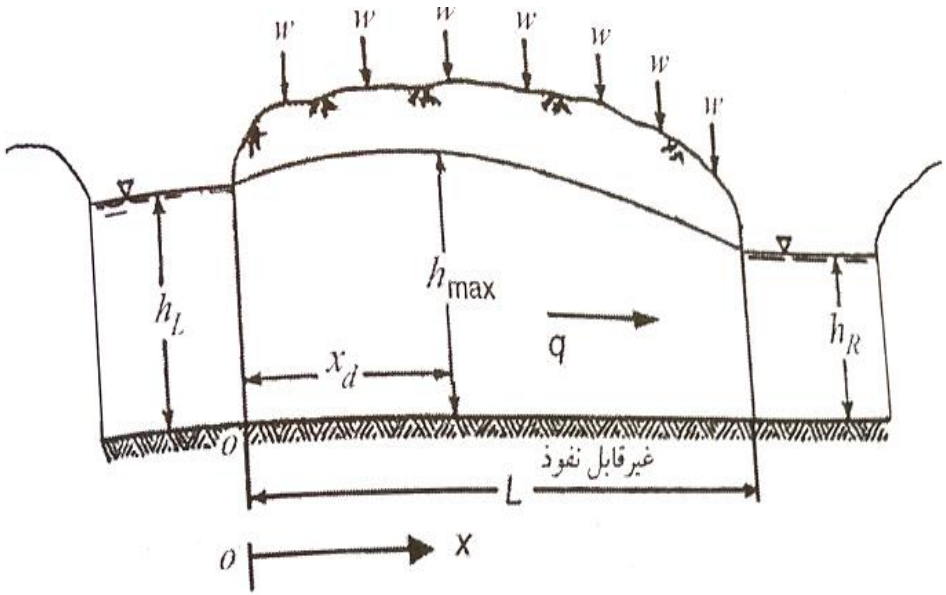
میزان دبی جریان بین دو کانال در هر مقطع به ارتفاع h و در یک متر طول (q_x) پس از تعیین $\frac{\partial h}{\partial x}$ از رابطه فوق، به صورت زیر خواهد بود:

$$q_x = \frac{K}{2L}(h_L^2 - h_R^2) + \frac{w}{2}(2x - L)$$

مقدار دبی در یک متر طول که وارد کانال سمت راست $(x = L)$ میشود عبارت است از:

$$q_L = \frac{K}{2L}(h_L^2 - h_R^2) + \frac{wL}{2}$$

با توجه به رابطه q_x می توان دریافت که دبی جریان بین دو کانال در عرض واحد مقدار ثابتی نیست و با موقعیت x تغییر می کند. همچنین می توان گفت برای جریان آب زیرزمینی در آبخوان باز با تغذیه از بالا یک صفحه مقسم آب زیرزمینی در منطقه تغذیه وجود دارد. این صفحه دقیقاً در جائی قرار دارد که ارتفاع سطح آب زیرزمینی (h_{max}) حداکثر است. صفحه مقسم آب نفوذ یافته در آبخوان را به دو بخش به گونه ای تقسیم می کند که هر بخشی به سمت یکی از کانال ها جریان دارد. بنابراین باید آن را به عنوان یک صفحه ی نفوذ ناپذیر تلقی نمود.



موقعیت صفحه مقسم از رابطه زیر به دست می آید:

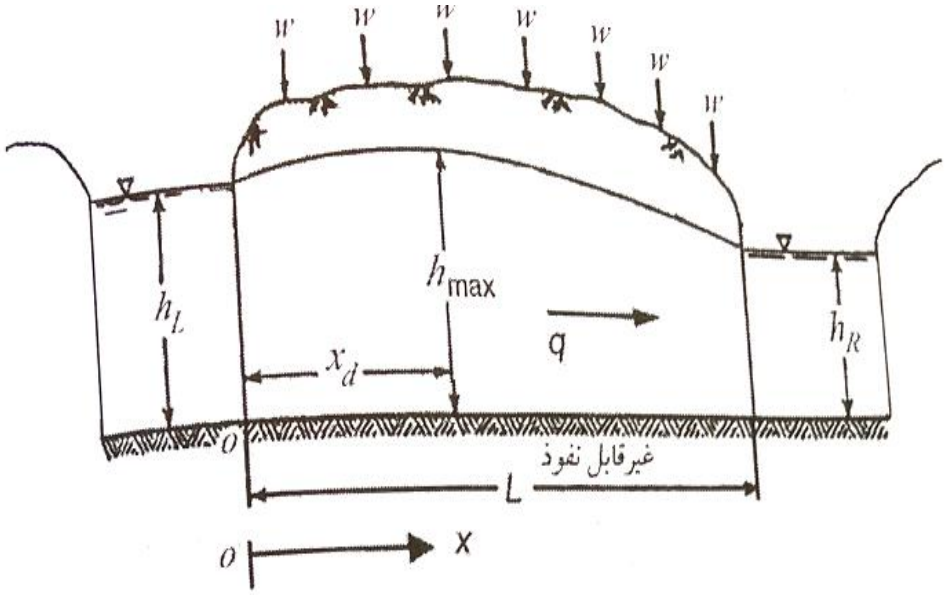
$$q_x = \frac{K}{2L}(h_L^2 - h_R^2) + \frac{w}{2}(2x - L) = 0 \Rightarrow x_d = \frac{L}{2} - \frac{K}{w}\frac{(h_L^2 - h_R^2)}{2L}$$

که در آن x_d، فاصله صفحه مقسم یا h_{max} از کانال سمت چپ (مبدأ مختصات) است. با قرار دادن $x = x_d$ در رابطه زیر، مقدار h_{max} بدست می آید:

$$h^2 = \frac{w}{K}x(L - x) + (h_R^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2$$

$$h_{max}^2 = \frac{w}{K}x_d(L - x_d) + (h_R^2 - h_L^2)\frac{x_d}{L} + h_L^2$$

جریان پایدار در آبخوان باز با تغذیه از بالا (روش دوم)



دبی کل جریان که از مقطع به ارتفاع h می گذرد، ناشی از تغذیه آبخوان با نرخ w در فاصله ی x و دبی حاصل از جریان بین دو کانال است. لذا برای یک متر طول کانال ها، عمود بر صفحه کاغذ می توان نوشت:

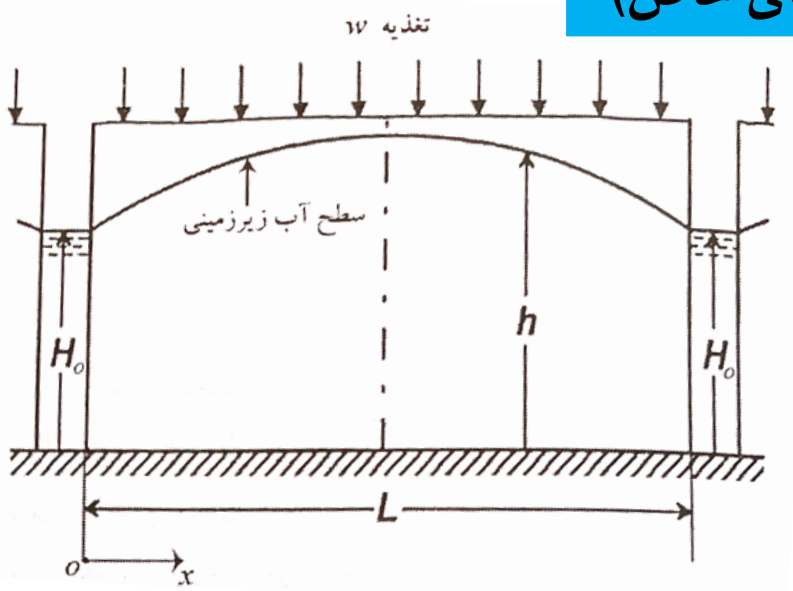
$$q_x = -kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + wx$$

$$h\mathrm{d}h = \frac{q_x}{\mathrm{k}}dx + \frac{wxdx}{k}$$

$$hdh = \frac{q_x}{\mathrm{k}}dx + \frac{wxdx}{k} \Rightarrow h^2 = \frac{w}{K}x(L-x) + (h_R^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2$$

با حل رابطه فوق برای شرایط مرزی داده شده، می توان همان رابطه بار هیدرولیکی ارائه شده در روش اول را بدست آورد.

جریان پایدار در آبخوان باز با تغذیه از بالا (بررسی حالت های خاص)



اگر فرض شود که تراز سطح آب در کانال های چپ و راست یکسان ($h_L = h_R = H_0$) باشد، رابطه تراز سطح آب زیرزمینی به صورت زیر خواهد شد:

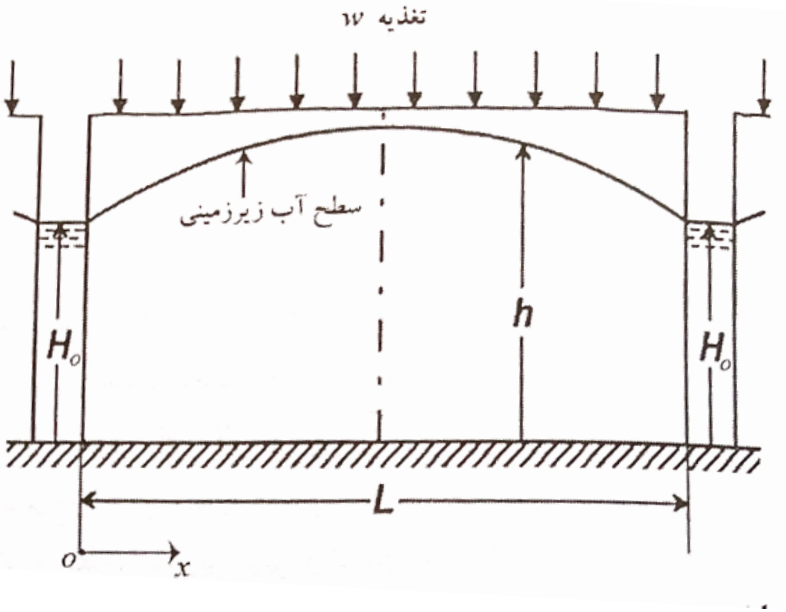
$$h^2 = \frac{w}{K}x(L-x) + H_0^2$$

$$h = \sqrt{\frac{w}{K}x(L-x) + H_0^2}$$

از این رابطه استنباط می شود که اگر تغذیه به آبخوان نباشد ($w = 0$)، $h = H_0$ و عاملی برای برقراری جریان بین دو کانال وجود نخواهد داشت. همچنین جهت تعیین حداکثر تراز سطح آب زیرزمینی (که در وسط بین دو کانال است، $x = \frac{L}{2}$)، بر اساس رابطه فوق عمل می شود:

$$h = \sqrt{\frac{w}{K}x(L-x) + H_0^2} \xrightarrow{x=\frac{L}{2}} h_{max} = \sqrt{\frac{wL^2}{4K} + H_0^2}$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)



$$h_{max} = \sqrt{\frac{wL^2}{4K} + H_0^2}$$

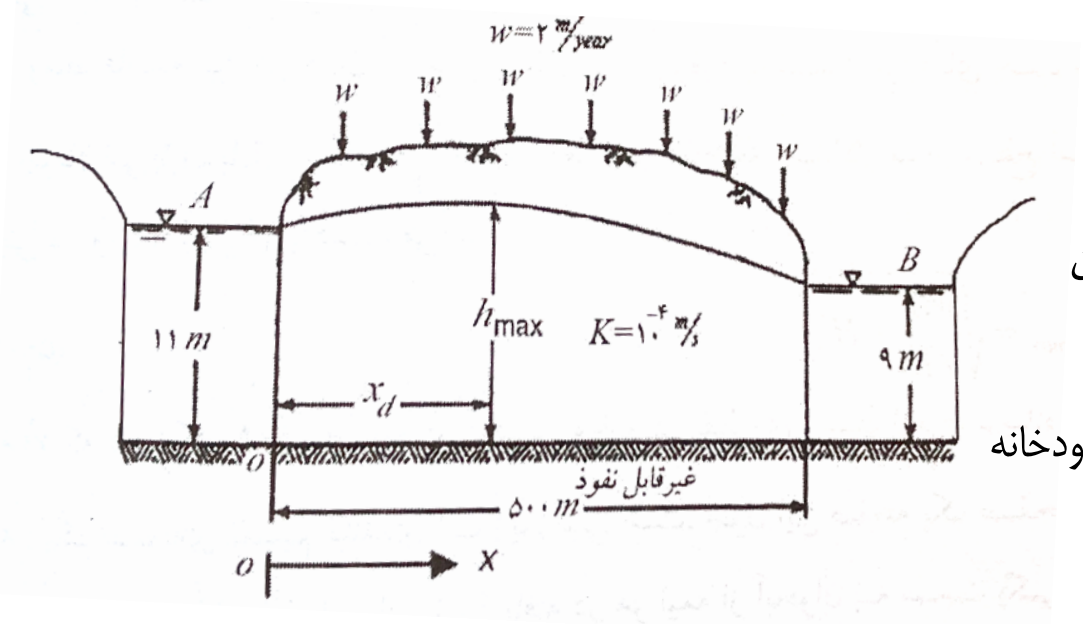
لازم به ذکر است صفحه فرضی واقع در نقطه وسط، یک صفحه تقسیم کننده آب زیرزمینی است چون این صفحه یک صفحه نفوذناپذیر فرض می شود. بنابراین آب نفوذ یافته در هر نیمه از آبخوان به سمت یکی از کانال ها در جریان است. لذا مقدار دبی وارد شده به هر یک از کانال ها در طول واحد (q) از رابطه زیر به دست می آید:

$$q_x = \frac{K}{2L}(h_L^2 - h_R^2) + \frac{w}{2}(2x - L) \quad \Rightarrow \quad q = \frac{wL}{2}$$

کاربرد روابط فوق برای تحلیل جریان زیرزمینی به سمت کانال های زهکشی در کشاورزی است. در نواحی مرطوب که در آن جا نرخ تغذیه w تقریباً ثابت است، می توان از روابط فوق جهت تخمین فاصله زهکش های روباز مورد نیاز استفاده نمود. لازم به ذکر است h_{max} نباید از مقداری که برای فعالیت مناسب ریشه گیاه لازم می باشد، تجاوز نماید.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

مثال) هدایت هیدرولیکی مواد تشکیل دهنده آبخوان بین دو رودخانه A و B، که شن و ماسه تمیز است، برابر با ۰/۰۰۰۱ متر بر ثانیه می باشد. آبخوان تحت تغذیه یکنواخت با نرخ ۲ متر در سال قرار دارد. ارتفاع سطح آب در رودخانه های A و B به ترتیب ۱۱ و ۹ متر است مطلوبست:



الف) معادله نیم رخ سطح آب زیرزمینی

ب) حداکثر ارتفاع سطح آب زیرزمینی و تعیین موقعیت آن

ج) میزان دبی سالانه جریان از آبخوان به هر دو رودخانه

د) زمان لازم برای پیمودن ذرات آب از مقسم به هر دو رودخانه

حل)

الف) معادله نیم رخ سطح آب زیرزمینی با استفاده از معادله حاکم و جاگذاری پارامترهای معلوم به صورت زیر بدست می آید:

$$h^2 = \frac{w}{K}x(L-x) + (h_R^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2$$

$$K = 0.0001\ m/s = 8.64\,m/day$$

$$W = 2\ m/year = 0.0055\,m/day$$

$$h = \sqrt{\frac{0.0055}{8.64}x(500-x) + (81-121)\frac{x}{500} + 121}$$

ب) ابتدا موقعیت حداکثر ارتفاع سطح آب زیرزمینی از رابطه زیر تعیین و سپس بر مبنای آن، مقدار h_{max} محاسبه می شود:

$$x_d = \frac{L}{2} - \frac{K}{w}\frac{(h_L^2 - h_R^2)}{2L} = \frac{500}{2} - \frac{8.64}{0.005}\frac{(121-81)}{2\times 500} = 187.16\,m$$

$$h_{max} = \sqrt{\frac{w}{K}x_d(L-x_d) + (h_R^2 - h_L^2)\frac{x_d}{L} + h_L^2}$$

$$= \sqrt{\frac{0.0055}{8.64}\times 187.16\times(500-187.16) + (81-121)\frac{187.16}{500} + 121} = 11.97\,m$$

ج) دبی جریان از آبخوان به هر رودخانه از رابطه مقابل تعیین می گردد:

$$q_x = \frac{K}{2L}(h_L^2 - h_R^2) + \frac{w}{2}(2x - L)$$

در رودخانه A، $x = 0$ است لذا دبی ورودی به رودخانه A در یک متر طول رودخانه برابر است با:

$$q_A = \frac{8.64}{2\times 500}(121-81) + \frac{0.0055}{2}(2\times 0 - 500) = -1.029\ m^2/day = -375.585\,m^2/year$$

علامت منفی نشان می دهد که جهت جریان به طرف رودخانه A در خلاف جهت مثبت محور X است.

در رودخانه B، $x = 500\ m$ است، لذا دبی ورودی به رودخانه B در یک متر طول رودخانه عبارتست از:

$$q_B = \frac{8.64}{2\times 500}(121-81) + \frac{0.0055}{2}(2\times 500 - 500) = 1.721\ m^2/day = 628.165\,m^2/year$$

د) زمان لازم برای پیمودن ذرات آب از مقسم به هر دو رودخانه

ابتدا سرعت حقیقی یا تراوش در خلل و فرج، برای هر بخش از آبخوان در طرفین صفحه تقسیم کننده جریان محاسبه می شود.

سپس زمان لازم از تقسیم مسافت بر سرعت بدست می آید. سرعت تراوش به طرف رودخانه A عبارت است از:

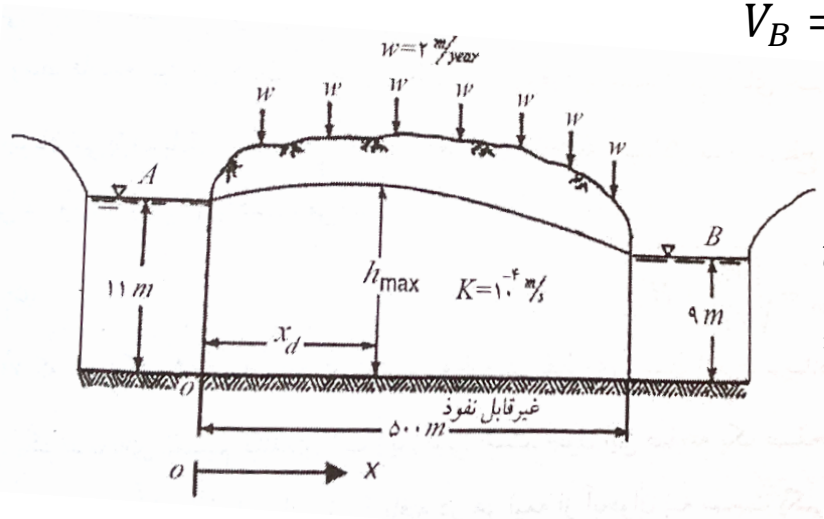
$$V_A = \frac{V}{n_e} = \frac{K}{n_e}\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{8.64}{0.32} \times \frac{11.97 - 11}{187.16} = 0.16\ m/day$$

و زمان لازم برای پیمودن مسافت بین مقسم تا رودخانه A برابر است با:

$$t_A = \frac{x_d}{V_A} = \frac{187.16}{0.16} = 1336.86\ day \approx 3.66\ year$$

به همین ترتیب سرعت تراوش و زمان لازم برای پیمودن مسافت بین مقسم تا رودخانه B برابر است با:

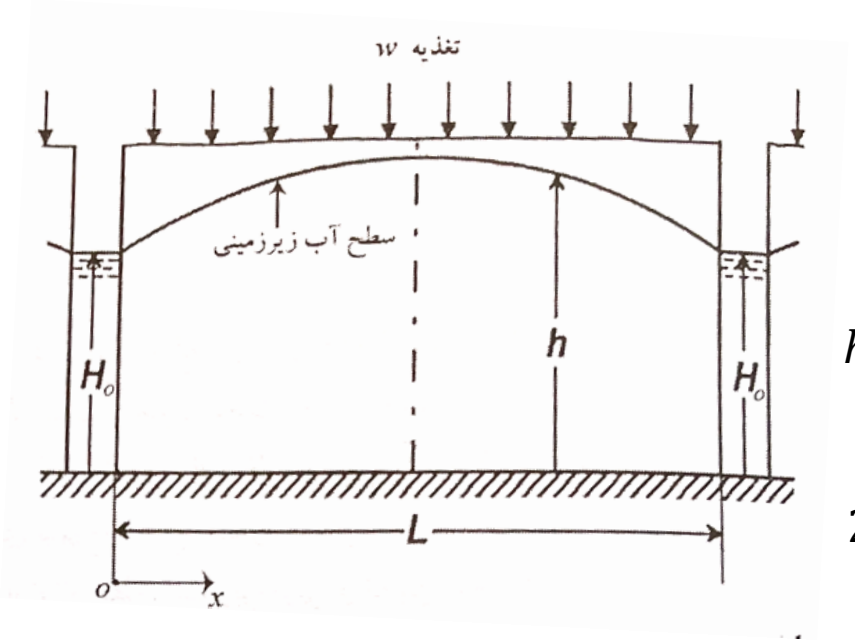
$$V_B = \frac{V}{n_e} = \frac{K}{n_e}\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{8.64}{0.32} \times \frac{11.97 - 9}{500 - 187.16} = 0.26\ m/day$$



$$t_B = \frac{500 - x_d}{V_B} = \frac{500 - 187.16}{0.26} = 1203.23\ day \approx 3.3\ year$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

مثال) اگر در شکل زیر هدایت هیدرولیکی آبخوان بین دو نهر ۲ متر در روز، $W = 0.8\ cm/day$ و $H_0 = 2\ m$ باشد، طول L را چنان انتخاب کنید که ارتفاع سطح آب زیرزمینی نسبت به سطح آب در نهرها از ۰/۶ متر تجاوز نکند.



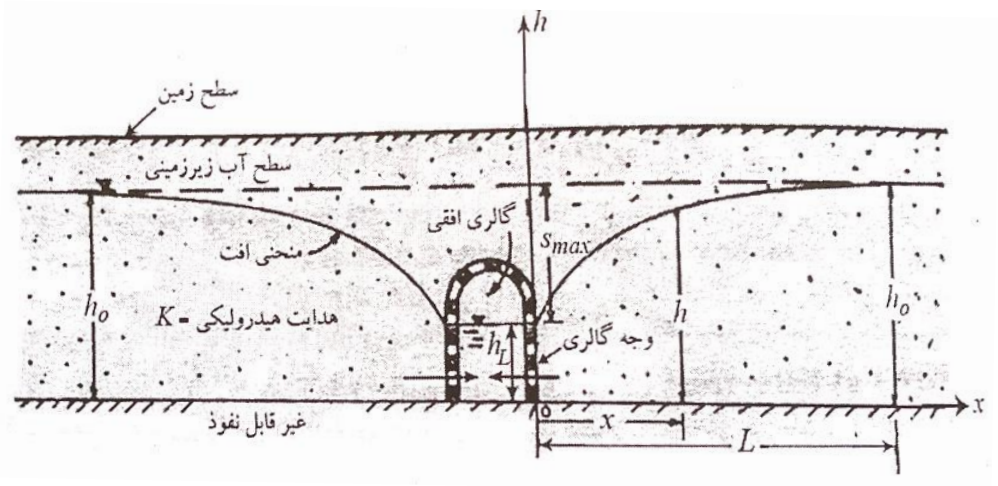
حل)

با توجه به مشخص بودن مقدار $h_{max} = 2 + 0.6 = 2.6\ m$، می توان L را به صورت زیر محاسبه نمود:

$$h_{max} = \sqrt{\frac{wL^2}{4K} + H_0^2}$$

$$2.6 = \sqrt{\frac{0.008L^2}{4 \times 2} + 4} \Rightarrow L \approx 52.5\ m$$

گالری زهکشی یا مجرای زهکشی



گالری زهکشی مجرای ویژه ای است که برای زهکشی (تخلیه آبهای نفوذ یافته از بالادست یا پی یک سد تعبیه شده و معمولاً در تمام طول سد نزدیک بستر سنگی و منطبق بر تراز نیم رخ عرضی دره ساخته می شود. گاهی از گالری برای شست و شوی آبخوان و پاک سازی آلودگی های محیط متخلخل نیز استفاده می شود.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

شکل زیر یک گالری افقی که بر روی یک بستر غیر قابل نفوذ ساخته شده نشان داده شده است. مطابق این شکل، آب زیرزمینی از دو سمت چپ و راست با سطح آزاد وارد گالری می شود و از این رو دبی ورودی به گالری برابر است با مجموع دبی های ورودی از دو سمت. تحلیل جریان در محیط متخلخل آبخوان به سمت گالری مشابه با تحلیل جریان بین دو نهر موازی است.

معادله سطح آب زیرزمینی در هر طرف گالری از رابطه زیر بدست می آید:

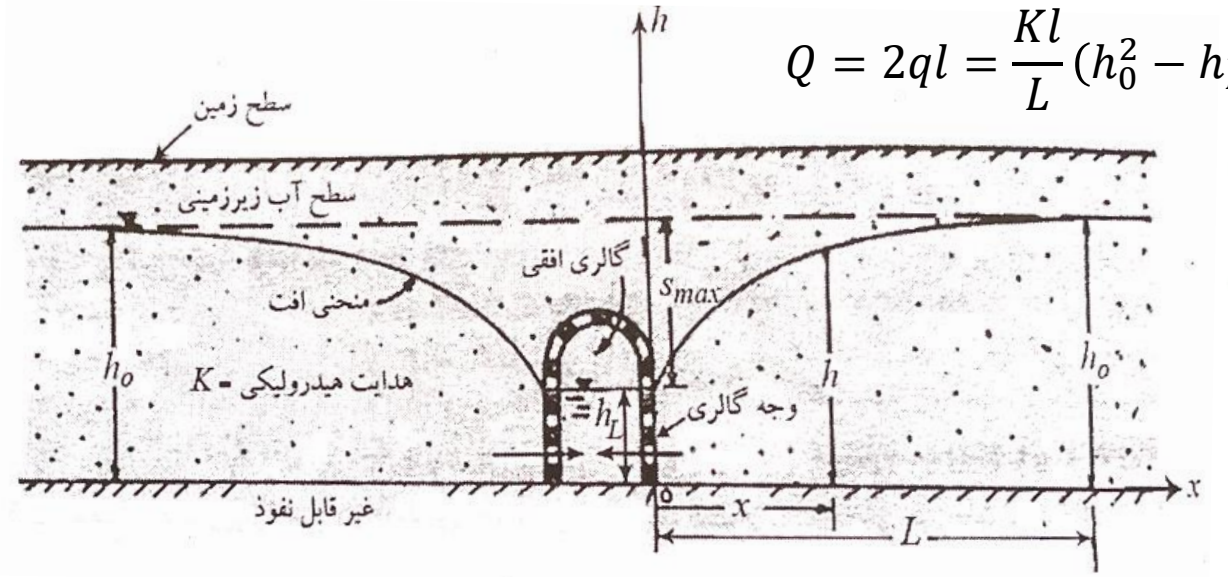
$$h^2 = \frac{w}{K}x(L-x) + (h_0^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2 \xrightarrow{w=0} h = \sqrt{(h_0^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2}$$

دبی ورودی از هر طرف به گالری عبارت است از:

$$q = kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{K}{2L}(h_0^2 - h_L^2)$$

همچنین مقدار آبی که در طول l از دو طرف گالری وارد آن می شود، از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$Q = 2ql = \frac{Kl}{L}(h_0^2 - h_L^2)$$



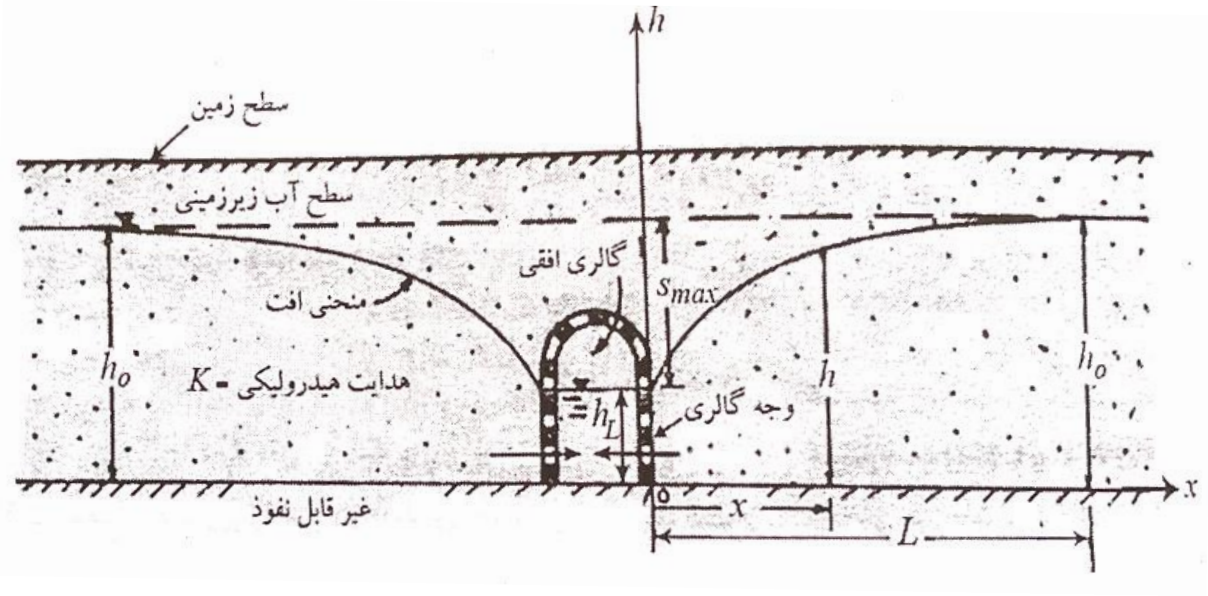
نکته: در استخراج رابطه فوق، مبدأ مختصات بر وجه گالری قرار دارد و جهت مثبت محور x رو به خارج است.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

مثال) در صورتی که اطلاعات مرتبط با گالری شکل زیر به صورت:

$$h_0 = 7\ m, h_L = 2\ m, L = 300\ m, K = 50\ \ m/day\ , l = 250\ m$$

باشد، مقدار دبی ورودی به گالری، معادله سطح ایستابی، افت سطح آب زیرزمینی را در گالری و در فاصله ۱۰۰ متری از گالری تعیین کنید.



حل)

$$h = \sqrt{(h_0^2 - h_L^2)\frac{x}{L} + h_L^2}$$

$$h = \sqrt{(49 - 4)\frac{x}{300} + 4}$$

$$h = \sqrt{0.15x + 4}$$

افت سطح آب در گالری حداکثر است:

$$h = \sqrt{0.15 \times 0 + 4} = 2\ m \Rightarrow s_{max} = 7 - 2 = 5\ m$$

افت سطح آب در فاصله ۱۰۰ متری از گالری برابر است با:

$$s = 7 - \sqrt{0.15 \times 100 + 4} = 2.64\ m$$

مقدار دبی ورودی به گالری

$$Q = \frac{Kl}{L}(h_0^2 - h_L^2) = \frac{50 \times 250}{300}(49 - 4) = 1875\ m^3/day$$

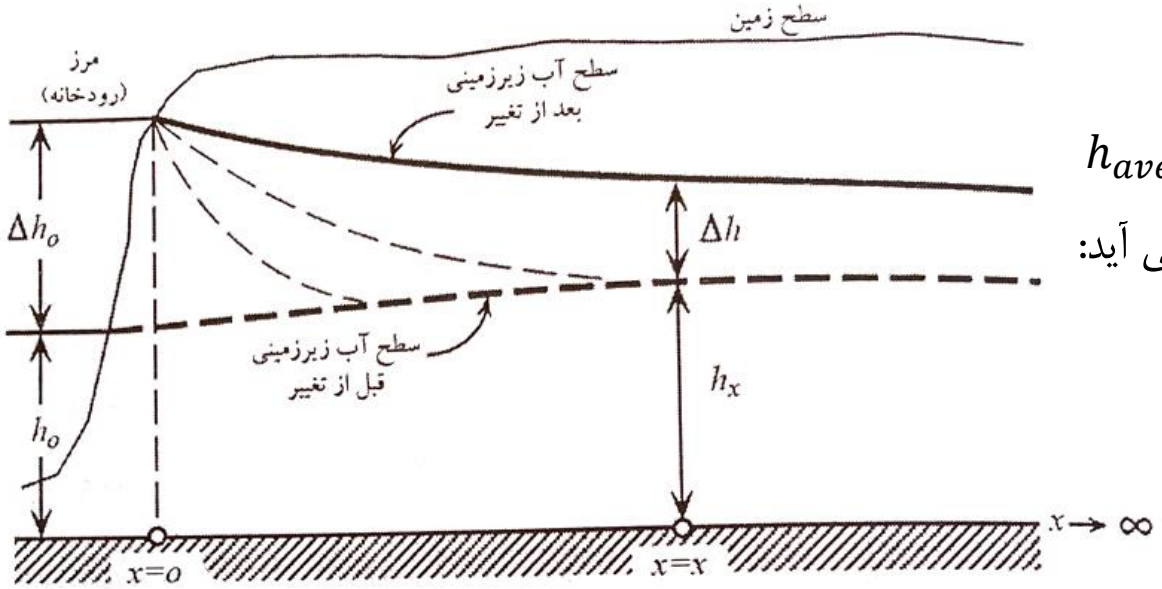
تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

جریان یک بعدی ناپایدار در آبخوان باز با تغییر ناگهانی در یک مرز

مطابق شکل زیر، یک آبخوان آزاد با یک رودخانه دائمی ارتباط مستقیمی دارد. فرض کنید سطح آب در رودخانه به طور ناگهانی به اندازه Δh_0 بالا رفته است. در پی این تغییر ناگهانی سطح آب زیرزمینی در آبخوان تغییر کرده و به اندازه Δh_x در هر نقطه به فاصله x از مبدا بالا می رود. برای شبیه سازی جریان در این حالت ناپایدار از معادله بوسینسک در حالت یک بعدی به صورت زیر استفاده می شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)=\frac{S_y}{K}\frac{\partial h}{\partial t}$$

در این رابطه، به علت ضریب h در جمله سمت چپ آن غیر خطی است. با توجه به اینکه این ضریب h به عنوان ضخامت آبخوان در هر محل وارد معادله می شود، لذا می توان با جایگزین نمودن ضخامت متوسط h_{ave} به جای h، رابطه فوق را به صورت خطی ارائه نمود.



$$h_{ave}=\frac{(h_0+\Delta h_0)+(h_x+\Delta h)}{2}$$

رابطه فوق، پس از خطی شدن به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{S_y}{Kh_{ave}}\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{S_y}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

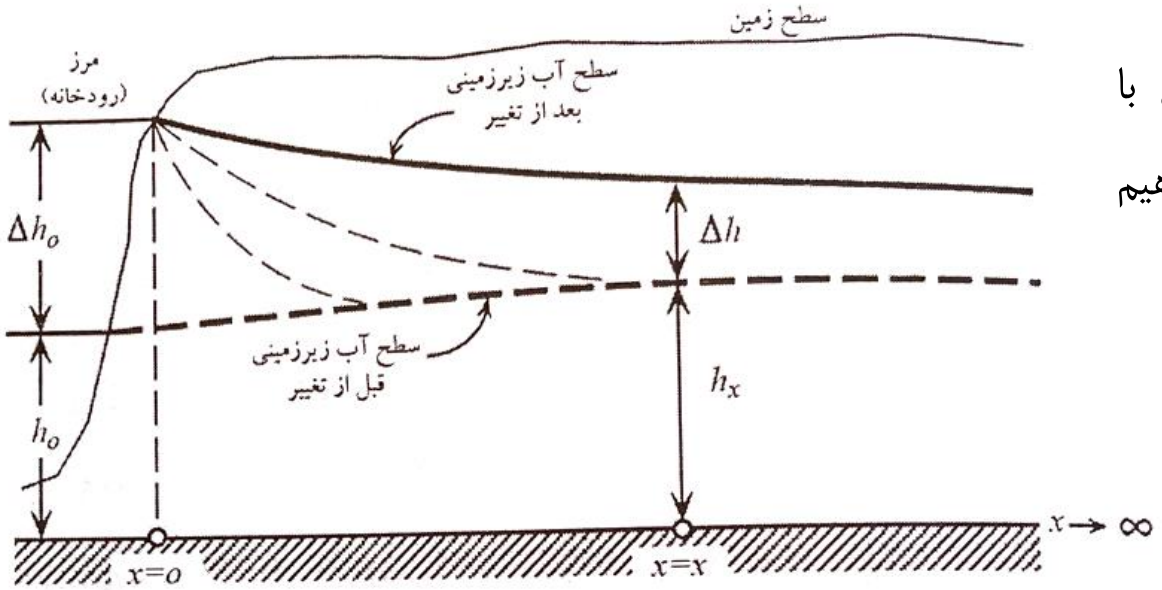
تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

با حل رابطه بدست آمده تحت شرایط اولیه و مرزی، می توان رابطه حاکم بر تراز سطح آب زیرزمینی را بدست آورد:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{S_y}{T}\frac{\partial h}{\partial t}$$

شرایط اولیه $\Delta h(x,0) = 0$

شرایط مرزی $\begin{cases} \Delta h(0,t) = \Delta h_0 \\ \Delta h(\infty,t) = 0 \end{cases}$



با حل رابطه فوق تحت شرایط اولیه و مرزی با استفاده از نظریه انتقال حرارت در یک هادی، خواهیم داشت:

$$\Delta h = \Delta h_0\left(1 - erf(\lambda)\right)$$
$$\Delta h = \Delta h_0\, erfc(\lambda)$$

$$erf(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

$$erfc(\lambda) = 1 - erf(\lambda)$$

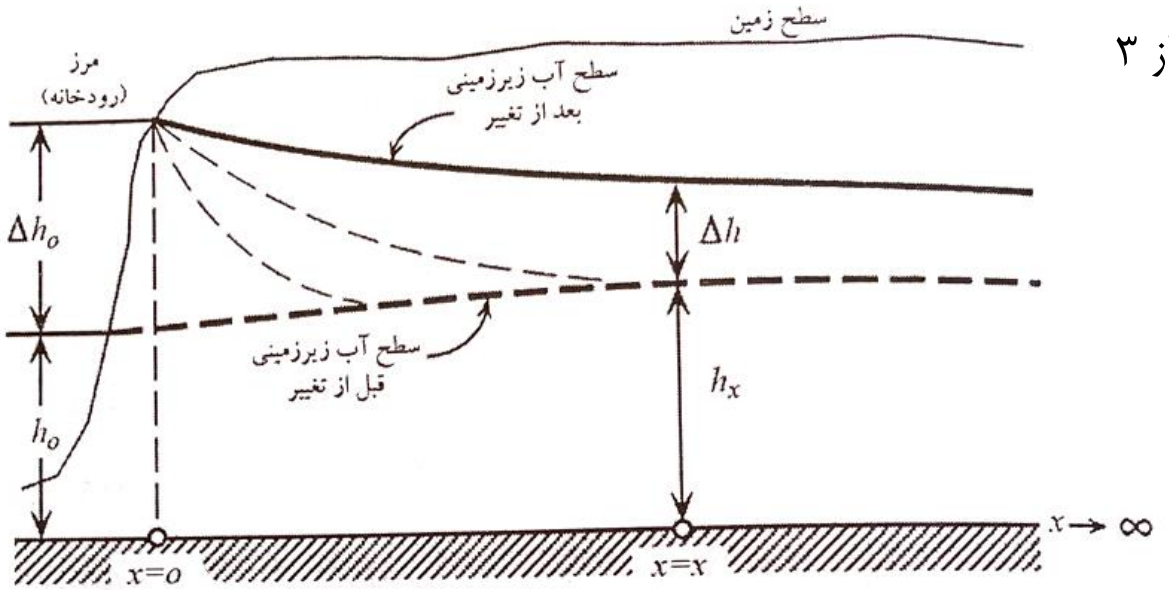
$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{at}} \quad , \quad a = \frac{Kh_{ave}}{S_y}$$

با استفاده از مقدار Δh می توان بالا رفتن سطح ایستابی در فاصله x از مرز پس از تغیر ناگهانی سطح آب رودخانه را برای پیش بینی نمود. همچنین این معادله برای تعیین مقادیر ضرایب T و K با معلوم بودن مقادیر عوامل مؤثر در آن نیز مورد استفاده قرار می گیرد.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

مثال) فرض کنید در آبخوان شکل زیر، پارامترها اندازه گیری شده به صورت زیر باشد:

$$\Delta h_0 = 1.95\,m \quad , \quad S_y = 0.25 \quad , h_{ave} = 15.46\,m \quad , \quad K = 5.61 \times 10^{-5}\ m/s$$



مقدار Δh را در فاصله ی ۳۰ متری از مرز پس از ۳ روز محاسبه نمایید.

حل)

$$a = \frac{Kh_{ave}}{S_y} = \frac{5.61 \times 10^{-5} \times 15.46}{0.25} = 0.003469 \quad , \lambda = \frac{30}{2\sqrt{0.003469 \times 3 \times 86400}} = 0.5$$

$$\Delta h = \Delta h_0\ erfc(0.5) = 1.95 \times 0.48 = 0.94\,m$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

مثال) فرض کنید در آبخوان شکل زیر مقدار Δh پس از ۸ روز در فاصله ۱۰۰ متری از مرز برابر با ۰/۲۹ متر اندازه گیری شده است. اگر $\Delta h_0 = 1.95\ m$,$h_x = 14.3\ m$,$S_y = 0.25$, $h_0 = 13.86\ m$ باشد مقدار K را تعیین کنید.

حل)

$$\Delta h = \Delta h_0\ erfc(\lambda) \Rightarrow erfc(\lambda) = \frac{\Delta h}{\Delta h_0} = \frac{0.29}{1.95} = 0.149$$

$$\lambda \approx 1.021$$

$$\lambda = \frac{x}{2\sqrt{\frac{Kh_{ave}}{S_y}t}} \Rightarrow \mathrm{K} = \frac{x^2 S_y}{4\lambda^2 h_{ave} t}$$

$$= \frac{100^2 \times 0.25}{4 \times 1.021^2 \times ((13.86 + 1.95 + 14.3 + 0.29)/2) \times 8 \times 86400}$$

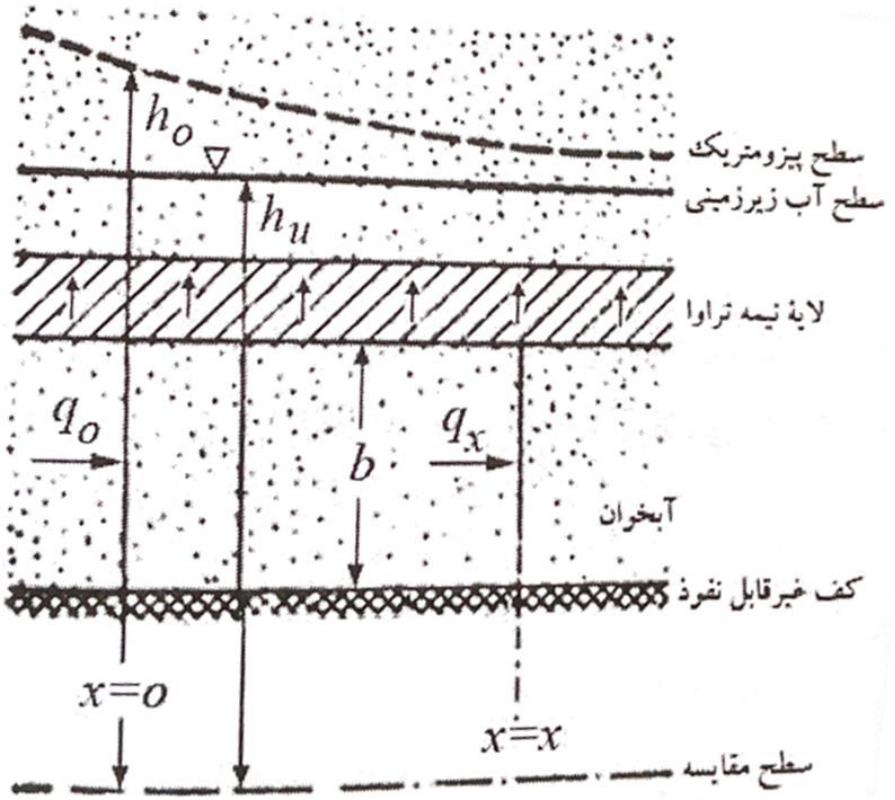
$$= 5.7 \times 10^{-5}\ m/s$$

جریان یک بعدی پایدار در آبخوان نیمه بسته (تراوشی)

شکل زیر یک آبخوان تراوشی را نشان می دهد که در بالای آن آبخوانی با سطح آزاد افقی قرار گرفته است. آب از آبخوان نیمه بسته و از طریق لایه نیمه تراوا به داخل آبخوان باز تراوش می کند و جریان یک بعدی در جهت x در داخل آبخوان نیمه تراوشی نیز برقرار است. معادله حاکم بر جریان یک بعدی این سامانه در حالت پایدار عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{h_u - h}{B^2} = 0$$

فرض کنید آبخوان نامحدود و سطح آزاد در آبخوان باز افقی است.



در چنین حالتی برای شرایط مرزی زیر

$$\begin{cases} h(0,t) = h_0 \\ h(\infty,t) = h_u \end{cases}$$

جواب حل معادله فوق به صورت زیر است:

$$h = h_u + (h_0 - h_u)exp\left(-\frac{x}{B}\right)$$

دبی جریان در هر مقطع از آبخوان به ضخامت b و فاصله x از مبدأ در عرض واحـــد برابر است با:

$$q_x = \frac{Kb}{B}(h_0 - h_u)exp\left(-\frac{x}{B}\right) = \frac{Kb}{B}(h - h_u)$$

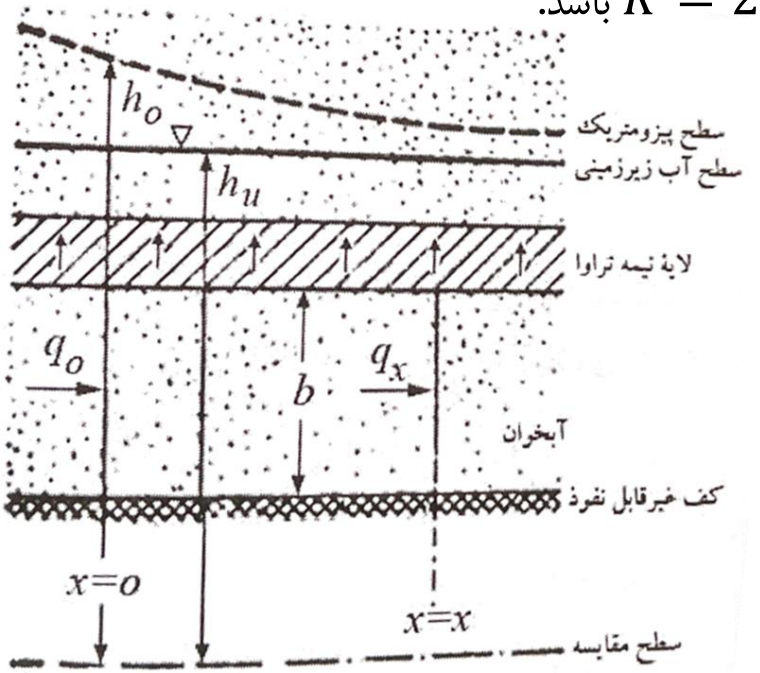
تحلیل جریان آب زیرزمینی (حل مسائل جریان پایدار و ناپایدار در آبخوان های آزاد و محصور)

اختلاف بین q_0 و q_x مقدار آبی خواهد بود که در فاصله ی بین $x = o$ و $x = x$ توسط لایه نیمه تراوا به داخل آبخوان باز تراوش کرده است:

$$\begin{cases} q_x = \dfrac{Kb}{B}(h - h_u) \\ q_0 = \dfrac{Kb}{B}(h_0 - h_u) \end{cases} \Rightarrow q_x - q_0 = \frac{Kb}{B}(h - h_0) = \frac{Kb}{B}(h_0 - h_u)\left(1 - exp\left(-\frac{x}{B}\right)\right)$$

مثال) در زیر منطقه ای، دو آبخوان باز و نیمه بسته یا تراوشی همانند شکل زیر قرار دارد. بار هیدرولیکی در آبخوان تراوشی در دو محل به فاصله یک کیلومتر از هم به ترتیب ۲۰۰ متر و ۱۹۷/۶۶ متر اندازه گیری شده است. اگر ارتفاع سطح آب زیرزمینی در منطقه برابر با ۱۹۵ متر باشد: مطلوب است الف) ضریب تراوش B

ب) میزان تراوش بین دو محل در صورتی که $b = 30\ m$ و $K = 25\ \ m/day$ باشد.



حل)

$$h_0 = 200\ m\ ,S_y = 0.25\ ,h_u = 195m\ ,\ h = 197.66\ m$$
$$x = 1000\ m$$

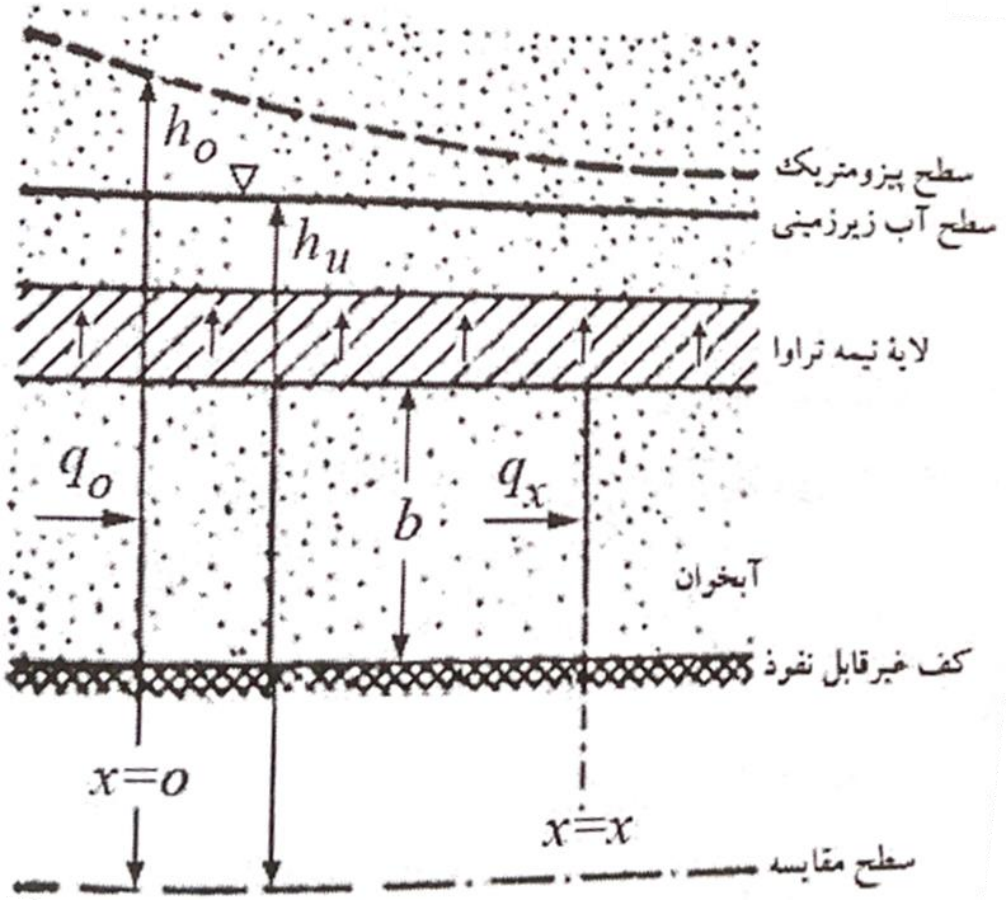
$$h = h_u + (h_0 - h_u)exp\left(-\frac{x}{B}\right)$$

$$197.66 = 195 + (200 - 195)exp\left(-\frac{1000}{B}\right)$$

$$B = 1584.5\ m$$

ب) میزان تراوش بین دو محل در صورتی که $b = 30\ m$ و $K = 25\ \ m/day$ باشد.

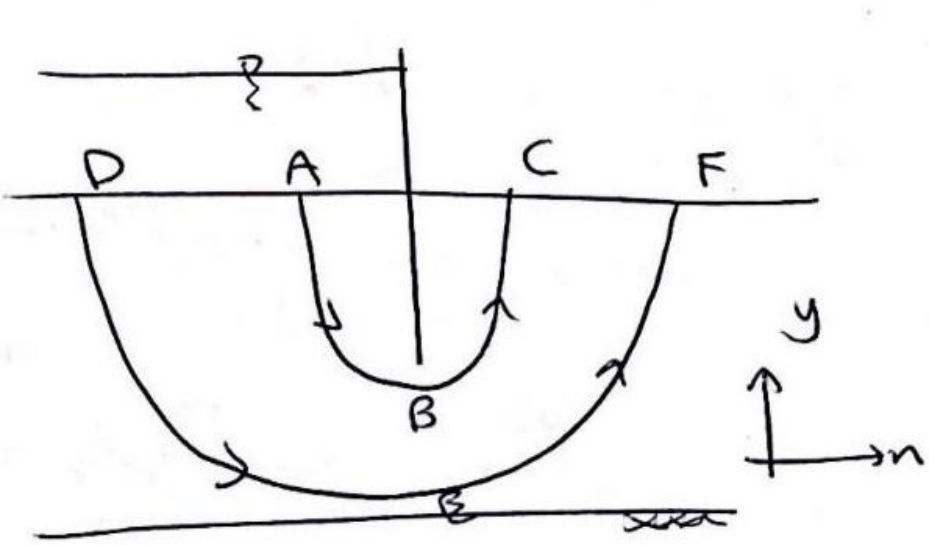
$$q_x - q_0 = \frac{25 \times 30}{1584.5}(200 - 195)\left(1 - exp\left(-\frac{1000}{1584.5}\right)\right) = 1.108\, m^2/day$$



تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

شبکه جریان

جهت تعیین مقدار کمی جریان در مسائل دوبعدی از شبکه جریان استفاده می شود.



مطابق شکل مقابل، افت بار بین دو نقطه F و D و نقاط A و C با هم برابر است اما گرادیان هیدرولیکی در مسیرهای مختلف با هم متفاوت می باشد. در چنین حالتی قانون دارسی به تنهایی کارساز نمی باشد. لذا از ترکیب معادله پیوستگی و قانون دارسی استفاده می شود و جهت حل از دو روش ترسیمی و حل عددی بهره گرفته می شود. در این بخش روش ترسیمی حل ارائه می شود.

خط هم پتانسیل: خطی که نقاط با مقادیر φ (تابع پتانسیل) یکسان را به هم متصل می کند، به عنوان خط هم پتانسیل در نظر گرفته می شود. به عبارت دیگر خط هم پتانسیل، مکان هندسی نقاطی است که در آن ها بار پیزومتری (با هیدرولیکی) مقداری ثابت و مشخص است. لازم به ذکر است خطوط هم پتانسیل هیچ گاه همدیگر را قطع نمی کنند.

$$\varphi = -Kh + c \Rightarrow V = \nabla\varphi \Rightarrow \begin{cases} V_x = \partial\varphi/\partial x \\ V_y = \partial\varphi/\partial y \end{cases}$$

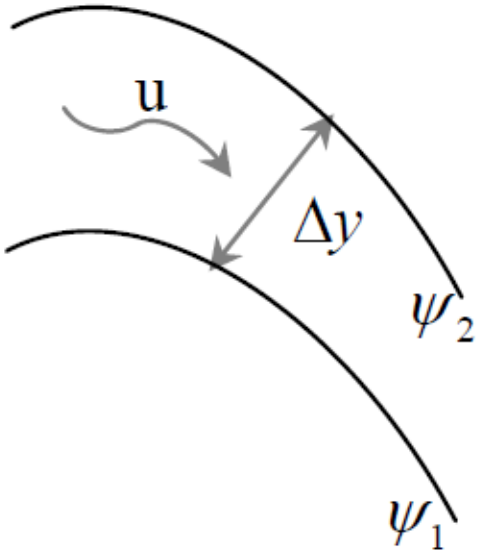
خط جریان: خطی که بردار سرعت در هر نقطه بر آن مماس باشد به عنوان خط جریان در نظر گرفته می شود. این خط، مقادیر با ψ (تابع جریان) یکسان را به هم متصل می کند.

$$V_x = \partial\psi/\partial y \ , V_y = -\partial\psi/\partial x$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

از ویژگی های تابع جریان و تابع پتانسیل این است که در هر نقطه از جریان این دو تابع بر هم عمود می باشند. لذا خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل بر هم عمودند و با ترسیم آن ها شبکه جریان تشکیل می شود. با استفاده از این ویژگی می توان دبی بین دو خط جریان متوالی را محاسبه و با جمع نمودن دبی های عبوری از بین سایر خطوط جریان، میزان کل دبی جریان آب زیرزمینی عبوری را محاسبه نمود. دبی عبوری از بین دو خط جریان متوالی به صورت زیر محاسبه می شود:

بنابراین اختلاف بین دو ψ متوالی برابر است با دبی عبوری از بین دو خط جریان در واحد عرض.



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow \int d\psi = \int u dy \rightarrow \psi_2 - \psi_1 = u\Delta y$$

اگر مولفه های سرعت جریان بصورت زیر باشد، مطلوبست : الف) تابع پتانسیل ب) تابع جریان ج) دبی عبوری در واحد عرض از بین دو نقطه با مختصات (۲ و ۱) و(۱ و ۱).

$$u = 4x^2 + 6xy - 4y^2$$

$$v = 3x^2 - 8xy - 3y^2$$

حل:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow d\varphi = udx \rightarrow \varphi = \int udx = \int (4x^2 + 6xy - 4y^2)dx$$

$$\varphi = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2y - 4y^2x + f(y)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \rightarrow 3x^2 - 8xy - 3y^2 = 3x^2 - 8xy + \frac{df(y)}{dy}$$

$$\frac{df(y)}{dy} = -3y^2 \rightarrow f(y) = \int -3y^2 dy = -y^3 + c_1$$

$$\varphi = \frac{4}{3}x^3 + 3x^2y - 4y^2x - y^3 + c_1$$

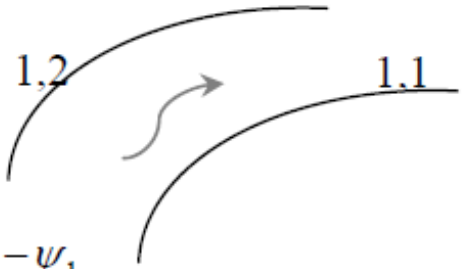
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow d\psi = udy \rightarrow \psi = \int udy = \int (4x^2 + 6xy - 4y^2)dy$$

$$\psi = 4x^2y + 3xy^2 - \frac{4}{3}y^3 + g(x)$$

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow -(3x^2 - 8xy - 3y^2) = 8xy + 3y^2 + \frac{dg(x)}{dx}$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = -3x^2 \rightarrow g(x) = \int -3x^2 dx = -x^3 + c_2$$

$$\psi = 4x^2y + 3xy^2 - \frac{4}{3}y^3 - x^3 + c_2$$



$$q = \psi_2 - \psi_1$$

$$\psi_1 = \psi\big|_{(1,1)} = (4\times 1^2 \times 1) + (3\times 1^2 \times 1) - (\frac{4}{3}\times 1^3) - 1^3 + c_2 = 4.66 + c_2$$

$$\psi_2 = \psi\big|_{(1,2)} = (4\times 1^2 \times 2) + (3\times 1\times 2^2) - (\frac{4}{3}\times 2^3) - 1^3 + c_2 = 8.3 + c_2$$

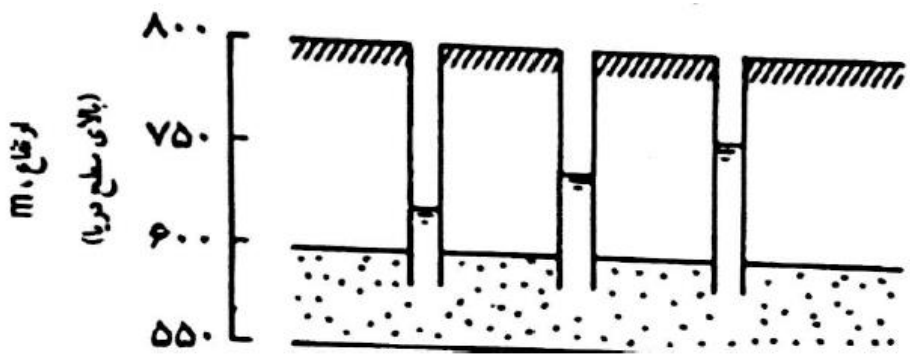
$$q = (8.3 + c_2) - (4.66 + c_2) = 3.66$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

جهت جریان آب زیرزمینی

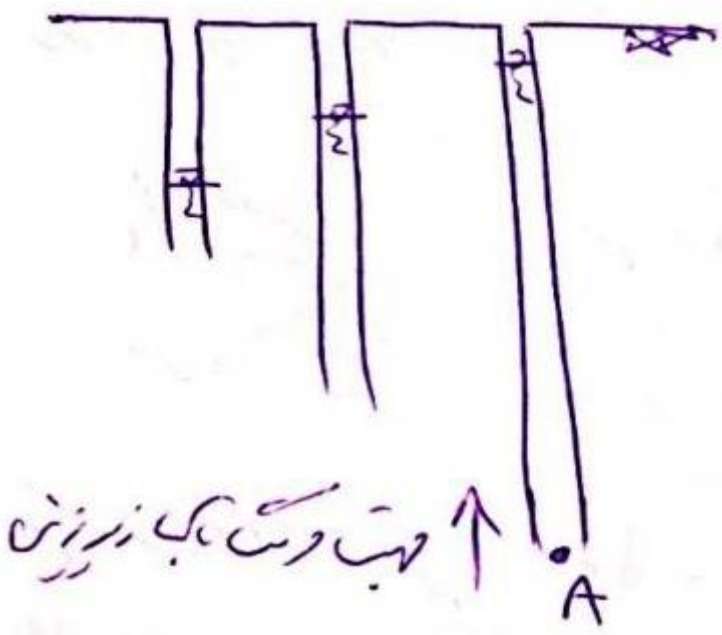
حرکت آب زیرزمینی بر اساس شیب هیدرولیکی بین دو نقطه بوده و آب از نقطه ای با بار هیدرولیکی بیشتر به سمت نقطه ای با بار هیدرولیکی کمتر حرکت می کند. برای تعیین بار فشار یک نقطه در محیط اشباع از پیزومتر استفاده می شود. بر این اساس اگر فاصله یک نقطه تا سطح مرجع انتخابی معلوم باشد، می توان با نصب یک پیزومتر در آن نقطه، بار هیدرولیکی را با استفاده از رابطه $h = P/\gamma + Z$ تعیین نمود.

معمولاً برای تعیین جهت حرکت آب زیرزمینی در یک ناحیه از نصب چندین پیزومتر به صورت گروهی استفاده می شود.

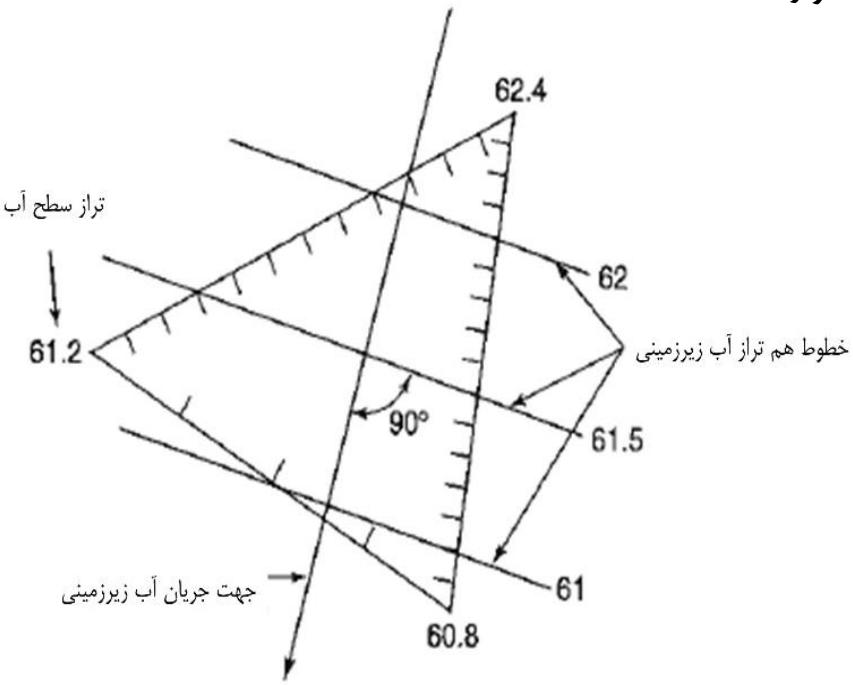


مطابق شکل مقابل، سه پیزومتر در یک امتداد و با فاصله از یکدیگر به گونه ای نصب شده اند که انتهای پایین آن ها در قسمت بالای لایه آبدار قرار دارد. بر این اساس، جریان از سمت راست (بار هیدرولیکی بیشتر) به سمت چپ (بار هیدرولیکی کمتر) برقرار می شود. در صورت مشخص بودن فاصله بین پیزومترها (ΔL)، می توان شیب هیدرولیکی ($\Delta h/L$) را محاسبه نمود و در صورت مشخص بودن هدایت هیدرولیکی لایه آبدار، امکان محاسبه سرعت دارسی (دبی ویژه) فراهم می شود. در برخی مواقع، شیب هیدرولیکی قائم نیز مورد توجه قرار می گیرد که در این حالت لازم است از دو یا چند پیزومتر که به طور قائم در عمق های مختلف نصب شده اند، استفاده شود.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

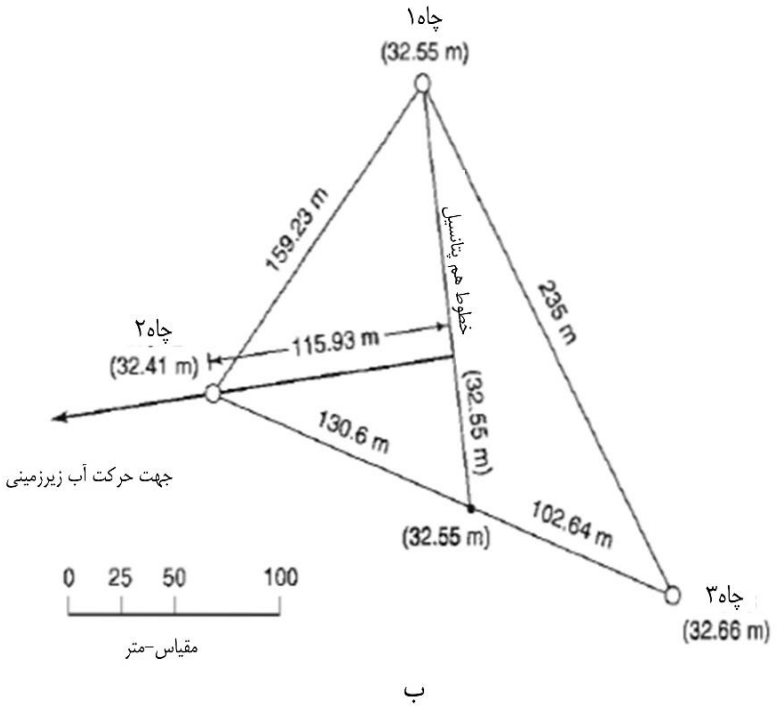


مطابق شکل مقابل، سه پیزومتر که در کنار هم قرار داشته و انتهای آن ها در عمق های متفاوتی و احیاناً در سازندهای زمین شناسی متفاوتی قرار دارند، برای تعیین جهت جریان عمودی مورد استفاده قرار می گیرند. تراز سطح آب زیرزمینی در این سه پیزومتر نشان می دهد که بار هیدرولیکی در اعماق پایین تر بیشتر از بار هیدرولیکی در اعماق بالاتر است و لذا جهت جریان از پایین به بالا است. پس از تعیین بار هیدرولیکی در هر پیزومتر و فاصله بین انتهای هر دو پیزومتر متوالی، می توان شیب هیدرولیکی را در جهت قائم مورد محاسبه قرار داد. چنانچه ارتفاع سطح آب زیرزمینی در سه چاه که رئوس یک مثلث را تشکیل می دهند، معلوم باشد می توان با درون یابی، خطوط هم تراز سطح آب زیرزمینی را ترسیم نمود. خط تراز آب زیرزمینی، مکان هندسی نقاط با بار هیدرولیکی یکسان می باشد. در واقع با استفاده از بار هیدرولیکی اندازه گیری شده در پیزومترها می توان خطوط هم تراز (Contour map) آبخوان را ترسیم و بر اساس آن میزان جریان ورودی و خروجی به آبخوان را تعیین نمود.

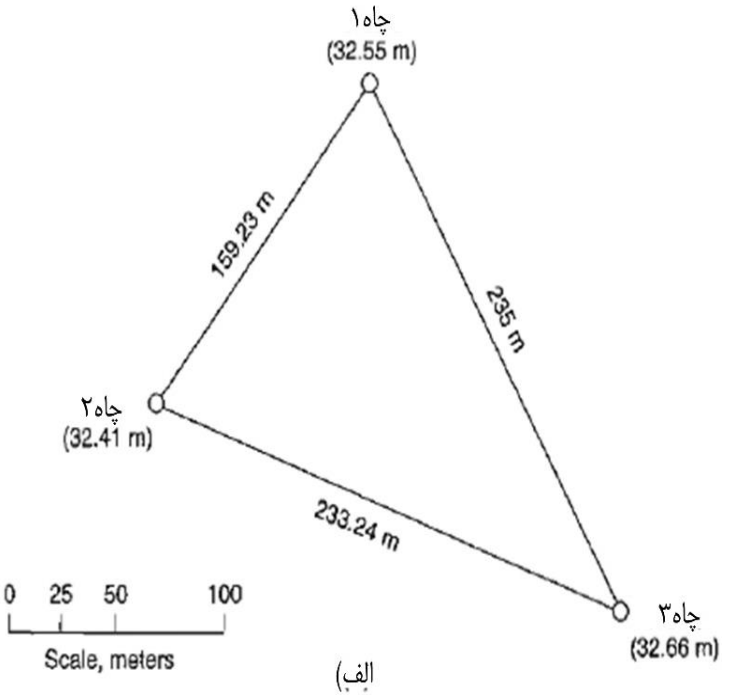


تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

مثال) سه چاه مشاهده‌ای جهت تعیین جهت حرکت آب زیرزمینی و هدایت هیدرولیکی در آبخوان، حفاری شده است. فاصله بین چاه‌ها و تراز سطح آب زیرزمینی در هر چاه در شکل نشان داده شده است. جهت جریان و گرادیان هیدرولیکی را تعیین نمائید.



ب



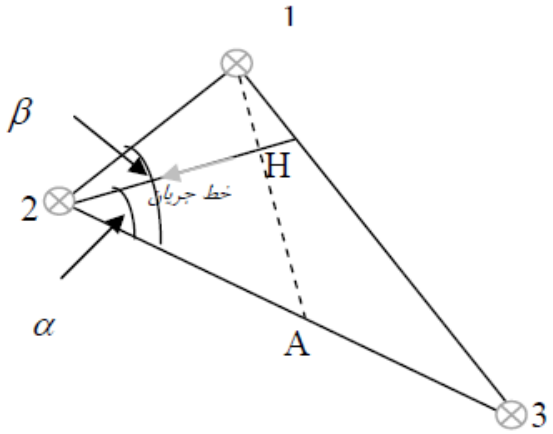
الف)

با مشخص بودن مقدار تراز سطح آب زیرزمینی در دو چاه شماره ۲ و ۳ و فاصله بین آن ها می توان با درون یابی، فاصله بین خط هم تراز ۳۲/۵۵ متر در محل تلاقی با خطی که چاه شماره ۲ و ۳ را به هم متصل می کند، تا چاه شماره ۲ تعیین نمود.

$$32.66-32.41=0.25$$

$$32.55-32.41=0.14$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 233.24 & 0.25 \\ A2 & 0.14 \end{matrix} \rightarrow A2=\frac{233.24\times 0.14}{0.25}=130.6m$$



از طریق قانون کسینوسها در مثلث بزرگ زاویه β به صورت زیر محاسبه می شود:

$$235^2 = 159.23^2 + 233.24^2 - 2\times 159.23\times 233.24\times Cos\beta \rightarrow \beta = 70.75^\circ$$

همچنین از طریق قانون کسینوسها $A1$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$A1^2 = 159.23^2 + 130.6^2 - 2\times 159.23\times 130.6\times Cos\beta \rightarrow A1 = 169.34m$$

مساحت مثلث $A12$ را می توان از دو طریق زیر محاسبه و با هم مساوی قرار داد تا مقدار $H2$ بدست آید:

$$\frac{A1\times H2}{2} = \frac{1}{2}\times 159.23\times 130.6\times Sin\beta \rightarrow H2 = 115.91m$$

$$Cos\alpha = \frac{115.91}{130.6} \rightarrow \alpha = 27.4^\circ$$

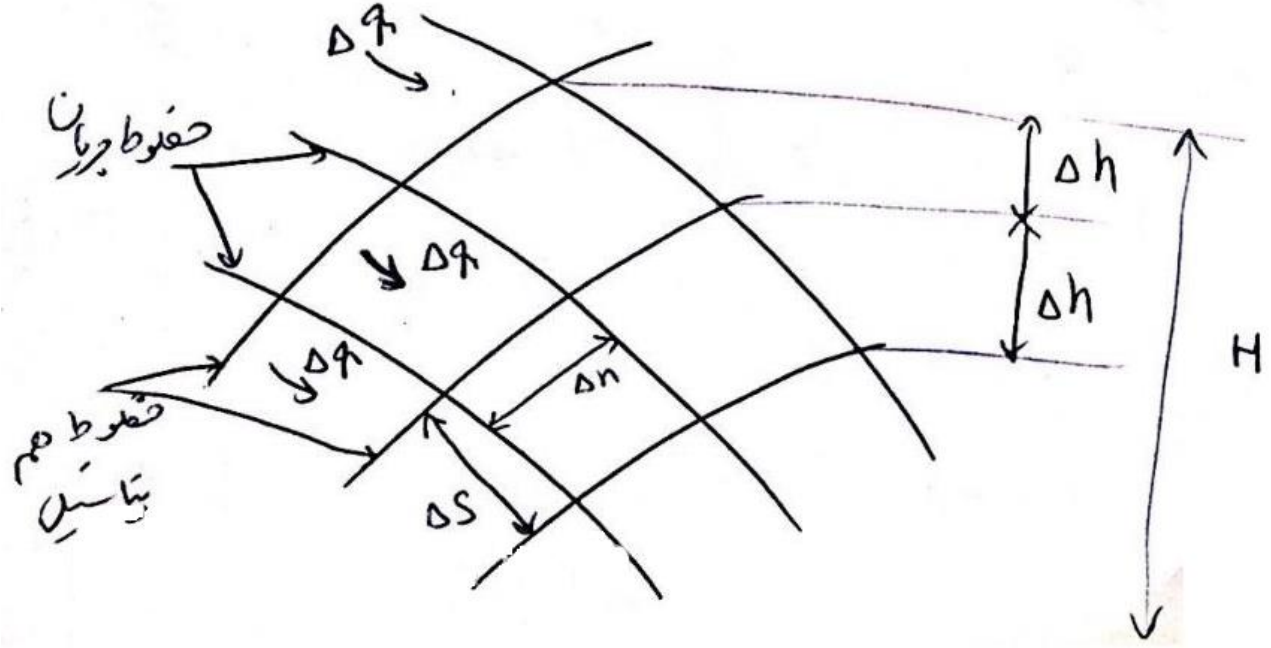
خطی که چاه شماره ۱ را به نقطه A وصل می کند یک خط هم پتانسیل است وخطی که بر این خط عمود است یک خط جریان می باشدکه جهت جریان را مشخص می کند. بنابراین جهت جریان با امتداد ۲۳ زاویه ۲۷/۴ درجه می سازد.

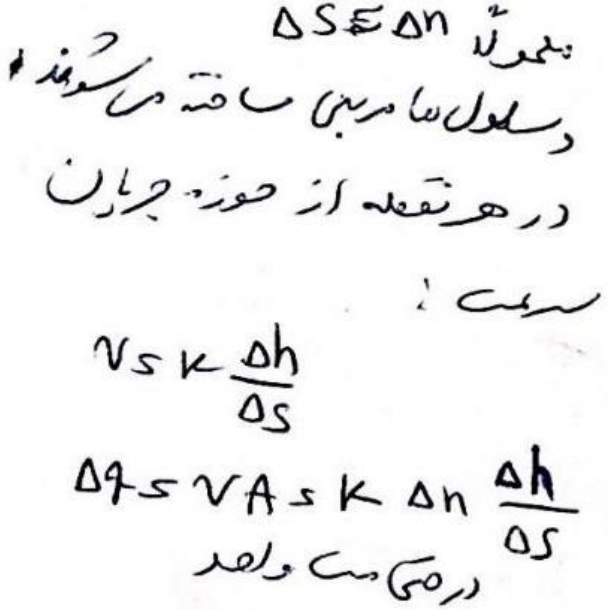
$$i = \frac{H_H - H_2}{H2} = \frac{32.55 - 32.41}{115.91} = 0.0012$$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

تحلیل شبکه جریان

در جریان دوبعدی، شبکه جریان از ترسیم خطوط جریان و خطوط هم پتانسیل تشکیل می شود. این خطوط نشان دهنده مسیر حرکت ذرات می باشند. خطوط جریان، حوزه جریان را به تعداد مشخصی مجرا یا کانال تقسیم می کنند و معمولاً دبی عبوری از میان هر یک از این مجراها یا کانال ها یکسان است.





چون $\Delta S \approx \Delta n$ ⟵

$$\Delta q = K \Delta h$$

$$\Delta h = \frac{H}{ne} \quad \hookrightarrow \quad \Delta q = K \frac{H}{ne}$$

اگر تعداد مجراهای جریان در شبکه nf باشد:

تعداد مربع ها در هر مجرای جریان
(تعداد افت ها در بار هیدرولیکی)

$$q = K \left(\frac{nf}{ne} \right) H$$

نسبت $\frac{ne}{nf}$ را ضریب شکل (shape factor) می نامند. اگر مقطع آبخوان b باشد (عمود بر صفحه کاغذ):

$$Q = Kb \left(\frac{nf}{ne} \right) H$$ (دبی کل)

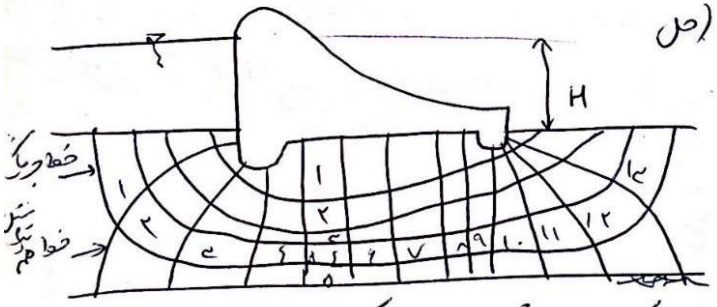
لذا از مفهوم شبکه جریان در یک حوزه ی جریان آب زیرزمینی می توان دریافت که:

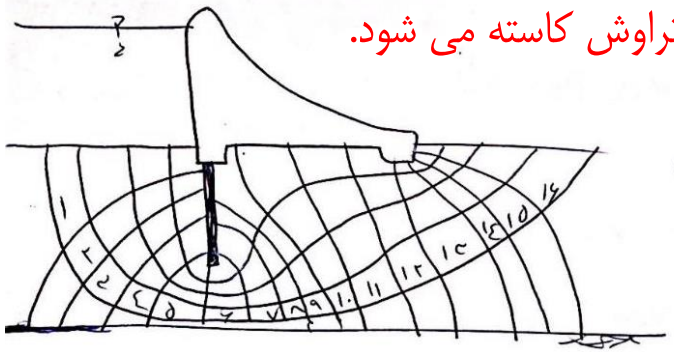
۱) تعیین بار، گرادیان هیدرولیکی و جهت جریان در هر نقطه از حوزه

۲) استفاده از مشخصات هندسی و هیدرولیکی شبکه برای تعیین دبی جریان در حوزه

۳) ترسیم شبکه جریان در حوزه مبنی بر حل تقریبی معادله لاپلاس در تمام حوزه

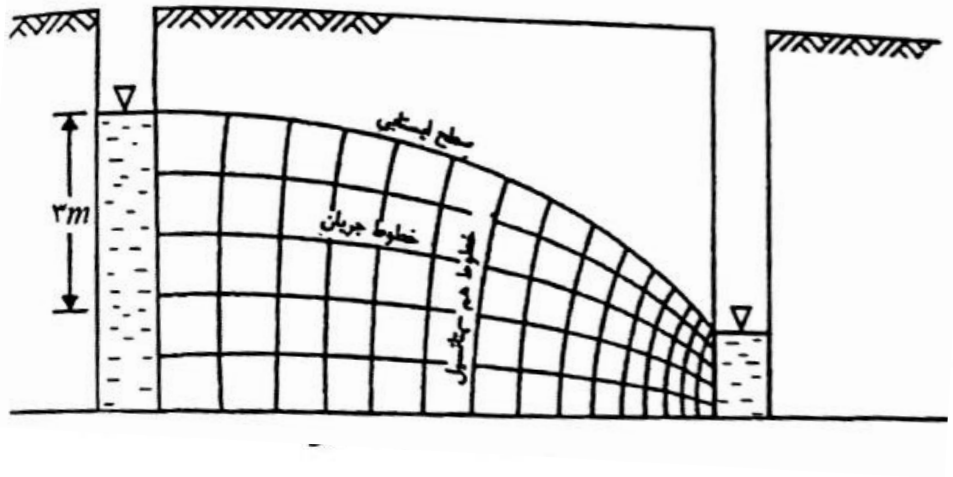
تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)





تقریباً ۱۹ درصد از میزان تراوش کاسته می شود.

ب) در شکل زیر شبکه جریان لایه ناکدار بین دو نهر موازی ترسیم شده است. نفوذ از نهر چپ به راست جریان دارد. مقدار هدایت هیدرولیکی لایه ناکدار $0.6\ m/min$ است. دبی در عرض واحد (عمود بر جهت جریان) را محاسبه کنید.



$$Q = Kb\left(\frac{n_f}{n_e}\right)H = 0.6 \times 1 \times \frac{4}{12} \times 2 \Rightarrow$$

$$Q = 0.6\ m^3/min = 864\ m^3/day$$ دبی واحد

بنابراین هندسه شبکه جریان به همراه هدایت هیدرولیکی و افت بار آبی قادر است میزان کل جریان در یک مقطع را بصورت جهت‌دار محاسبه نماید.

در محیط‌های ناهمسان خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل بر هم عمود نمی‌باشند مگر زمانیکه جریان موازی یکی از جهت‌های اصلی باشد. جهت محاسبه جریان در این شرایط بایستی مرزهای جریان تغییر یابند تا یک محیط همسان بدست آید. رابطه دوبعدی حاکم بر جریان آب زیرزمینی تحت شرایط پایدار و ناهمسان و ناهمگن:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad , \qquad K_x \neq K_z$$

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad , \qquad K_x \neq K_z$$

با توجه به رابطه فوق، و اینکه مقادیر هدایت هیدرولیکی در دو جهت یکسان نمی باشند، لذا شبکه جریان مربعی نبوده و لازم است با تغییر محور مختصات در جهت x و به صورت زیر، شبکه جریان مربعی برای محاسبه جریان عبوری ایجاد نمود:

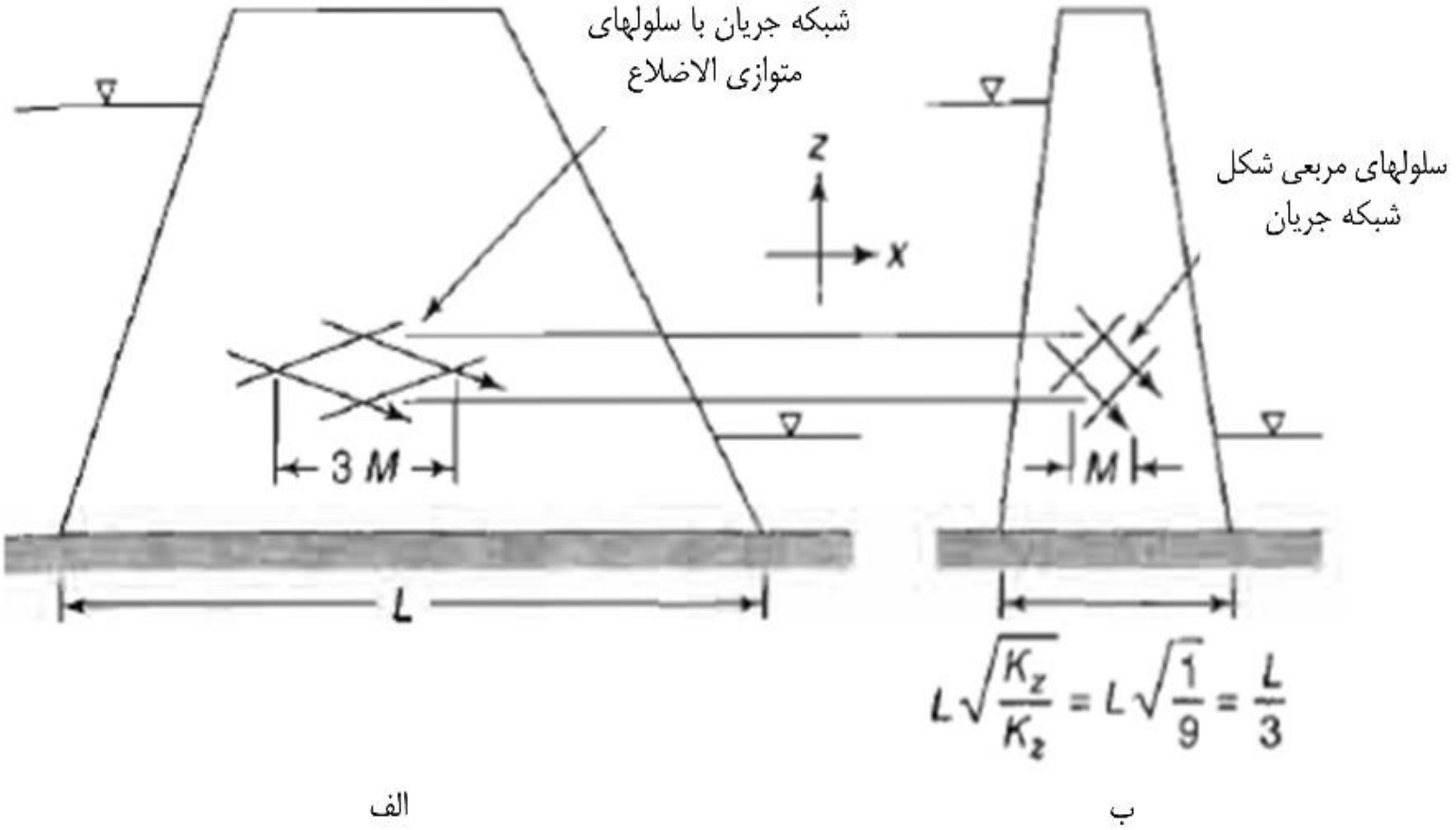
$$\frac{\partial^2 h}{(K_z/K_x)\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \qquad \acute{x} = x \times \sqrt{K_z/K_x} \Rightarrow \partial \acute{x}^2 = (K_z/K_x)\partial x^2$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \acute{x}^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

بنابراین برای یک آبرفت نمونه که $K_x > K_z$ است، تمام ابعاد افقی به میزان $\sqrt{K_z/K_x}$ کاهش می‌یابد. این کار باعث تغییر مقطع به محیط همسان می‌شود که در این حالت هدایت هیدرولیکی معادل آن برابر است با:

$$K' = \sqrt{K_x K_z}$$

با این مقطع تغییر شکل یافته، می‌توان شبکه جریان را طراحی و میزان جریان عبوری از آن را محاسبه کرد. پس از تعریف شبکه جریان می‌توان با ضرب نمودن ابعاد افقی در $\sqrt{K_x/K_z}$ به حالت ناهمسان قبلی دست یافت.



تشریح تحلیل شبکه جریان برای ناهمسانی در هدایت هیدرولیکی بدنه یک سد خاکی

(الف) مقطع ناهمسان واقعی با $K_x = 9K_z$ (ب) مقطع ناهمسان تغییر شکل یافته با $K_x = K_z$

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

جریان مرتبط با خطوط تراز آب زیرزمینی

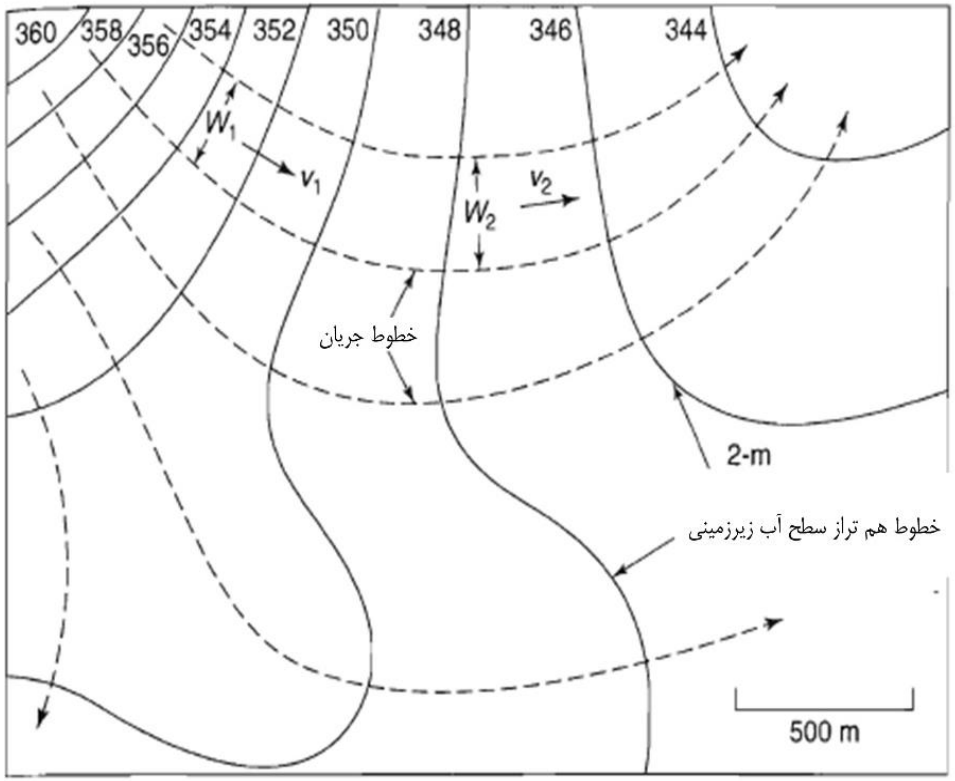
نقشه‌های تراز سطح آب زیرزمینی به همراه خطوط جریان، اطلاعات مفیدی را جهت جانمایی چاه‌های جدید در اختیار کارشناس قرار می‌دهند. خطوط هم‌تراز محدب نشان‌دهنده منطقه تغذیه و خطوط هم‌تراز مقعر نشان‌دهنده مناطق برداشت از آب زیرزمینی می‌باشد. همچنین مناطقی با هدایت هیدرولیکی مناسب را می‌توان با توجه به فاصله بین خطوط هم‌تراز تعیین نمود. با توجه به نقشه تراز سطح آب زیرزمینی می‌توان دریافت که دو خط جریان مجاور، بدلیل عدم عبور جریان از آنها همانند مرزهای نفوذناپذیر عمل می‌نمایند. اگر ضخامت یک آبخوان یکنواخت باشد، میزان جریان عبوری از مقطع ۱ و۲ (مطابق شکل) برابر است با:

$$q = W_1 v_1 = W_2 v_2$$

در این رابطه v سرعت و W عرض مقطع عمود بر جریان می‌باشد. با توجه به قانون دارسی داریم:

$$W_1 K_1 i_1 = W_2 K_2 i_2 \qquad \frac{K_1}{K_2} = \frac{W_2 i_2}{W_1 i_1}$$

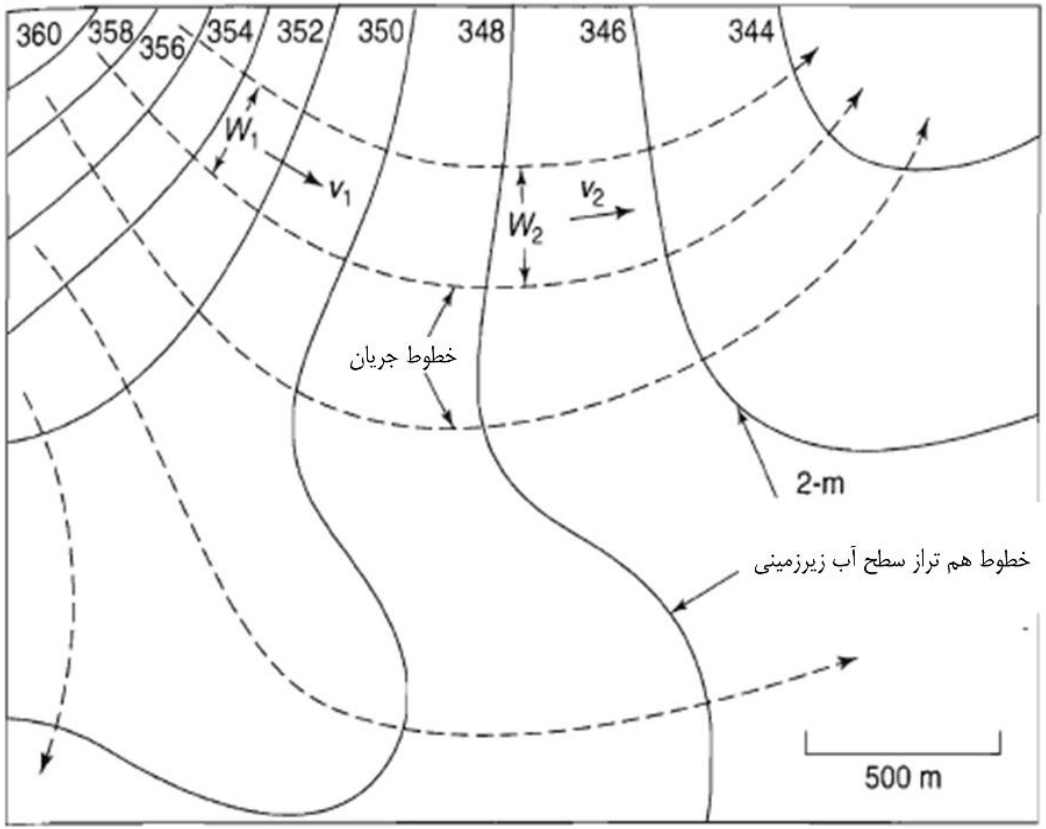
در این رابطه K هدایت هیدرولیکی و i گرادیان هیدرولیکی است. نسبت $\frac{W_2}{W_1}$ و $\frac{i_2}{i_1}$ را می‌توان از روی نقشه تراز سطح آب زیرزمینی تخمین زد.



تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

در موارد خاص که خطوط جریان موازی هم می‌باشند معادله $\frac{K_1}{K_2} = \frac{W_2 i_2}{W_1 i_1}$ به صورت زیر خلاصه می‌شود: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{i_2}{i_1}$

بررسی رابطه فوق نشان می‌دهد که اگر جریان آب زیرزمینی یکنواخت باشد، مناطقی که فاصله خطوط هم‌تراز بیشتر است (گرادیان یکنواخت)، هدایت هیدرولیکی بالاتری نسبت به مناطقی که فاصله بین خطوط هم‌تراز نزدیک بهم (گرادیان با شیب زیاد) می‌باشد، دارد. بنابراین مطابق شکل زیر، حفر چاه بهره‌برداری در مقطع ۲ بهتر از مقطع ۱ می‌باشد.



در مناطقی که خطوط هم‌تراز سطح آب زیرزمینی بصورت خطوط بسته در اطراف یک گروه از چاه‌ها با میزان کل برداشت Q قرار دارند، انتقال‌پذیری این منطقه از آبخوان را می‌توان محاسبه نمود. اگر یک شبکه جریان برای این منطقه طراحی شود:

$$T = \frac{nQ}{mh}$$

n تعداد مربع های واقع در یک لوله جریان و m تعداد لوله های جریان می باشد. همچنین h، اختلاف بین خطوط هم تراز می باشد.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

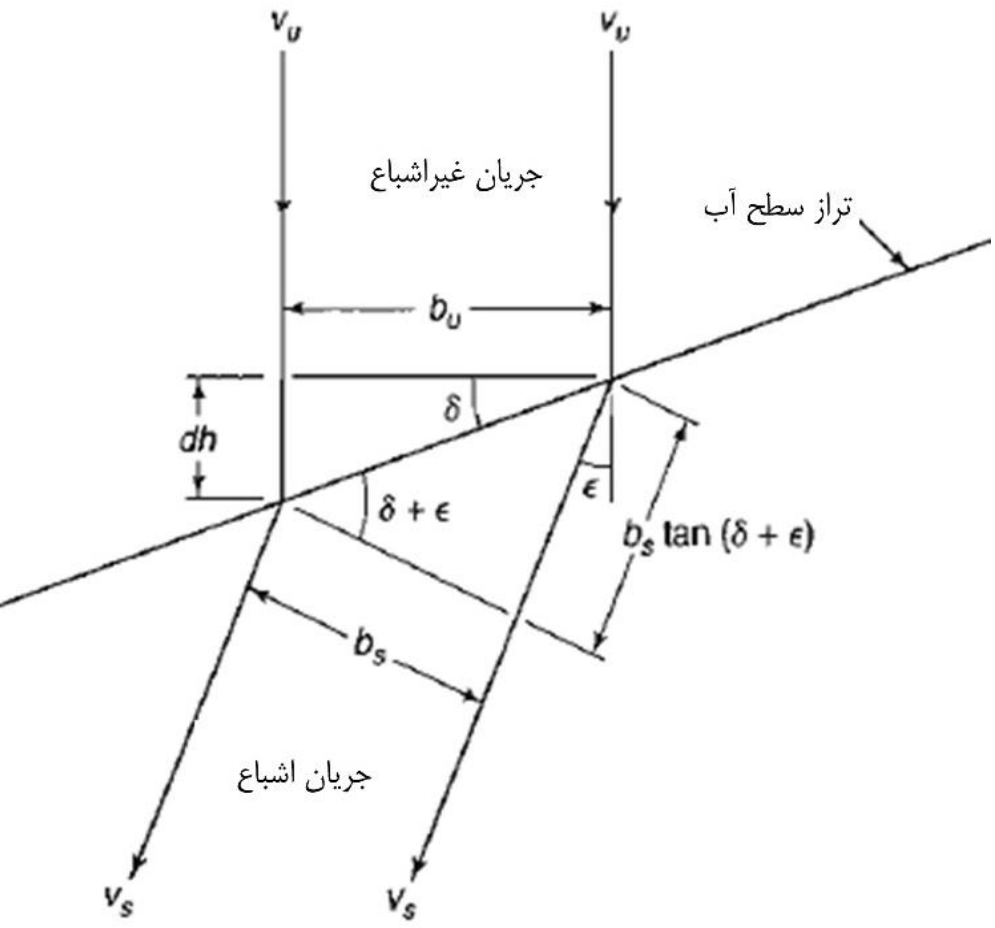
$Lohman$ یک راه مناسب و ساده‌ای را جهت محاسبه T توسط خطوط هم‌تراز بدون شبکه جریان، بر اساس حل معادله زیر پیشنهاد داده است:

$$T = \frac{2Q}{(L_1 + L_2)\Delta h/\Delta r}$$

L_1 و L_2 طول دو خطوط هم‌تراز بسته هم‌مرکز، Δh اختلاف دو خطوط تراز و Δr متوسط فاصله بین دو خطوط هم‌تراز بسته می‌باشد.

جریان عبوری از سطح آب

با توجه به اینکه از سطح آب جریانی عبور نمی‌کند، در نتیجه سطح آب نقش مرز آب زیرزمینی را بازی می‌کند. با این وجود اگر جریانی مانند آب نشتی به سطح آب برسد، خطوط جریان همانند مرزنفوذناپذیر در سراسر سطح آب بصورت موازی هم قرار نمی‌گیرند. جهت ارائه تأثیر شکست جریان در این محیطها، v_u سرعت قائم محیط غیراشباع که به سطح آب می‌رسد و v_s سرعت محیط اشباع زیر سطح آب را نشان می‌دهد. افت بار آبی dh در طول خط چپ جریان در زیر سطح آب و در فاصله $b_s\, tan(\delta + \varepsilon)$ رخ می‌دهد.



تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

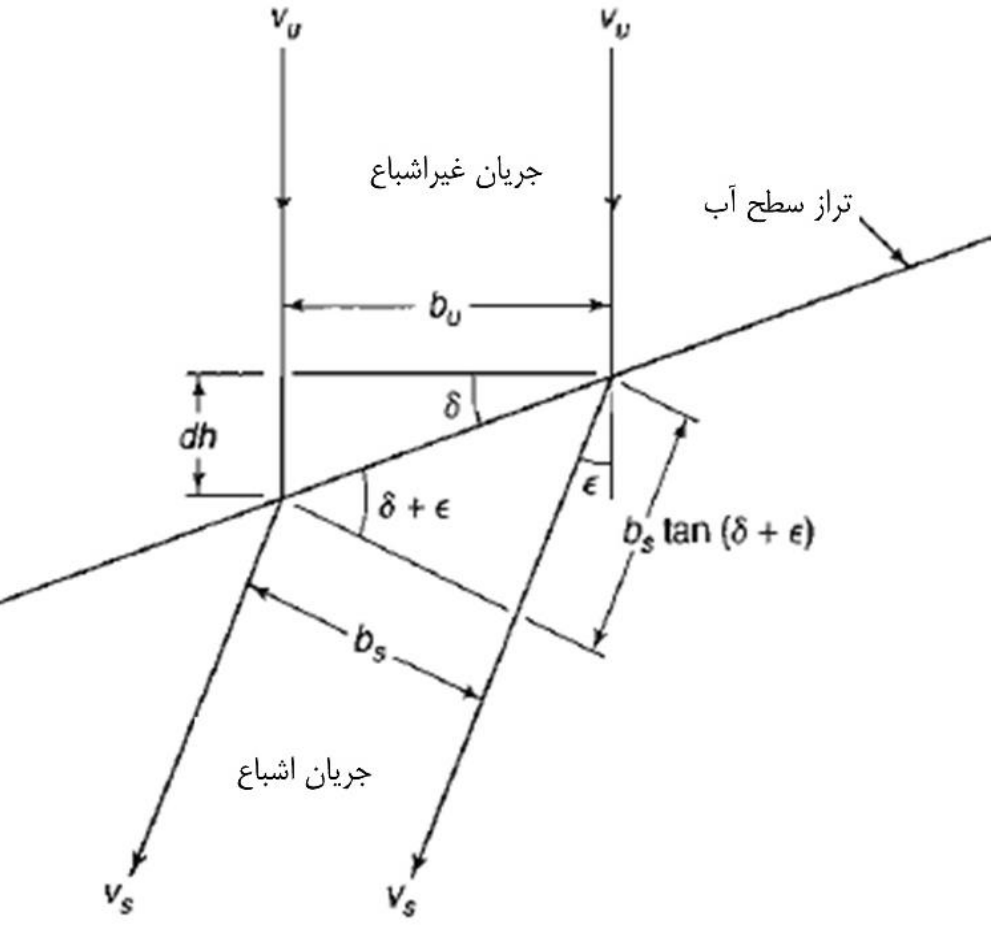
$$v_s = Ki = K\frac{dh}{b_s\,tan(\delta+\varepsilon)}\,,dh = b_u\,tan\,\delta \Rightarrow v_s = K\frac{b_u\,tan\,\delta}{b_s\,tan(\delta+\varepsilon)}$$

با استفاده از رابطه پیوستگی جریان داریم: $\frac{b_u}{b_s} = \frac{v_s}{v_u}$. با جایگذاری این رابطه در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$v_s = K\frac{v_s\,tan\,\delta}{v_u\,tan(\delta+\varepsilon)}$$

چنانچه معادله فوق را بر حسب ε حل نماییم، خواهیم داشت:

$$\varepsilon = tan^{-1}\left(\frac{K}{v_u}tan\,\delta\right) - \delta$$



زمانی‌که $v_u > 0$ خطوط جریان زیر سطح آب زاویه $90° - \delta - \varepsilon$ می‌سازد. در مواردی که جریان نشتی وجود ندارد، $v_u = 0$ و $\varepsilon = 90° - \delta$ بنابراین v_s موازی سطح آب می‌گردد.

مثال) در یک منطقه به میزان $1.6m/year$ در سال آب بصورت نشتی به تراز سطح آب در یک آبخوان آزاد وارد می‌شود. اگر هدایت هیدرولیکی و گرادیان هیدرولیکی منطقه‌ای در آبخوان به ترتیب $9.3m/day$ و 0.01 می‌باشد. زاویه شکست خطوط جریانی که از سطح آب آبخوان آزاد عبور می‌کنند، را محاسبه نمایید.

حل) با توجه به $i = 0.01, v_u = 1.6m/year = 4.38 \times 10^{-3} m/day$ و $K = 9.3m/day, \tan\delta = i = 0.01$ بنابراین $\delta = 0.573°$. زاویه شکست، ε، توسط معادله زیر تخمین زده می شود:

$$\varepsilon = tan^{-1}\left(\frac{K}{v_u}\tan\delta\right) - \delta = tan^{-1}\left(\frac{9.3\,m/d\,ay}{4.38 \times 10^{-3}\,m/d\,ay}tan(0.573\,°)\right) - 0.573° = 86.7°$$

زاویه بین جهت جریان آب زیرزمینی و خطوط جریان شکسته شده برابر است با:

$$90° - (\delta + \varepsilon) = 90° - (0.573° + 86.7°) = 2.7°$$

جریان عبوری از مرز دو لایه با هدایت هیدرولیکی متفاوت

زمانی‌که جریان از یک منطقه با هدایت هیدرولیکی K_1 وارد محیط دیگری با هدایت هیدرولیکی K_2 می‌شود، جهت جریان تغییر می‌یابد. این تغییر جهت جریان ناشی از پیوستگی، قابل ملاحظه بوده و در قالب دو مقدار K بیان می‌شود.

تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)

تصویری از جریان زیرزمینی در یک محیط طبیعی در شکل زیر نشان داده شده است. مطابق این شکل، میزان کل جریان ورودی و خروجی از مرز باید با هم برابر باشند. لذا سرعت‌های طبیعی v_n می‌بایست بصورت زیر در نظر گرفته شوند:

$$v_{n1} = v_{n2}$$

θ_1 و θ_2 زاویه نسبت به حالت نرمال است که در شکل نشان داده شده است.

$$K_1 \frac{dh_1}{dL_1} cos\,\theta_1 = K_2 \frac{dh_2}{dL_2} cos\,\theta_2$$

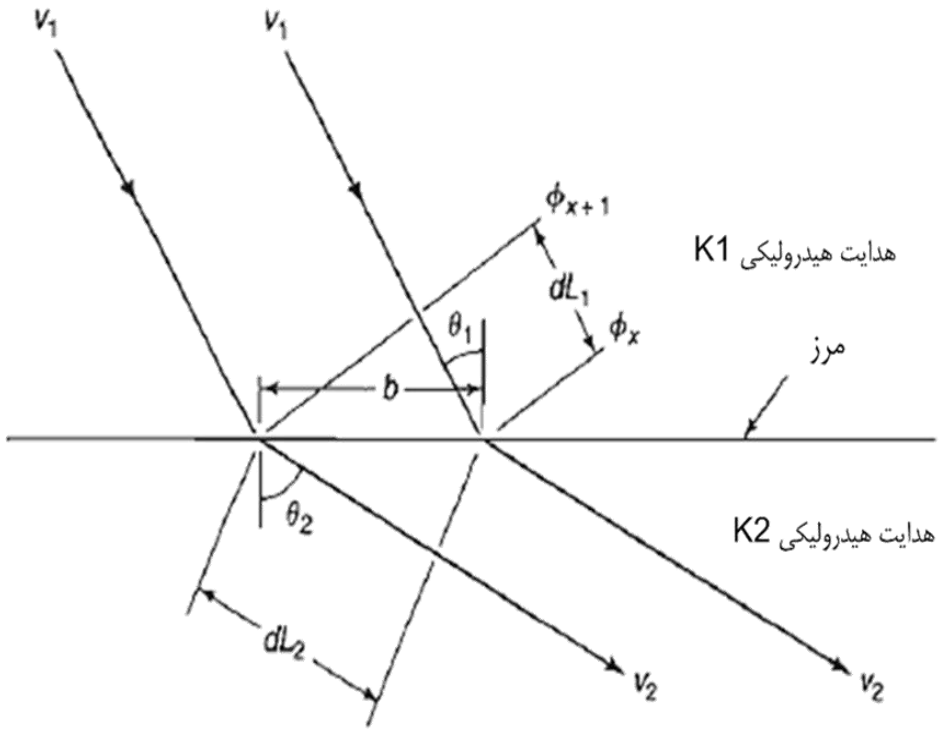
همچنین فاصله b در واقع طول مرز بین دو خط جریان مجاور هم بوده که می‌بایستی در هر طرف مرز با هم برابر باشند. برای شکل زیر فاصله b بصورت زیر بدست می‌آید:

$$b = \frac{dL_1}{sin\,\theta_1} = \frac{dL_2}{sin\,\theta_2} \Rightarrow dL_1\,sin\,\theta_2 = dL_2\,sin\,\theta_1$$

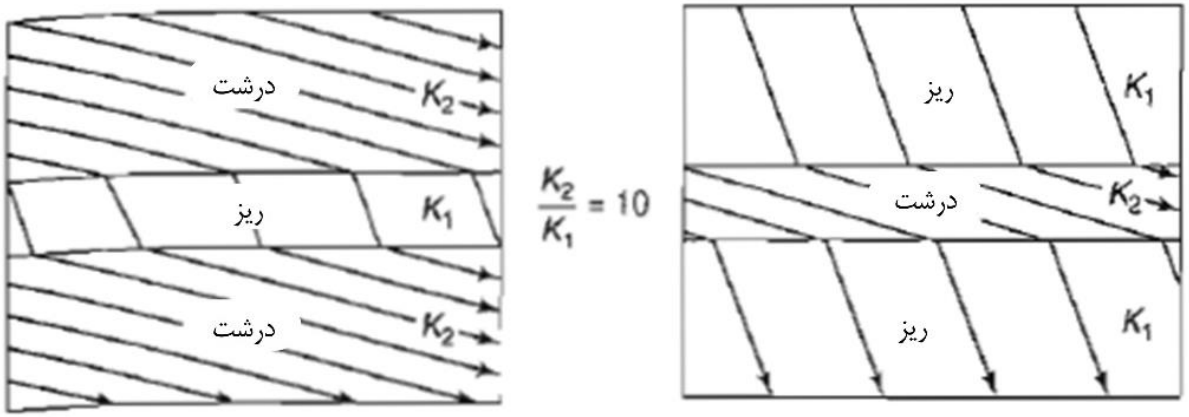
با تلفیق این دو رابطه و با توجه به اینکه $dh_1 = dh_2$، بین دو خط هم‌پتانسیل رابطه زیر حاکم است:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{tan\,\theta_1}{tan\,\theta_2}$$

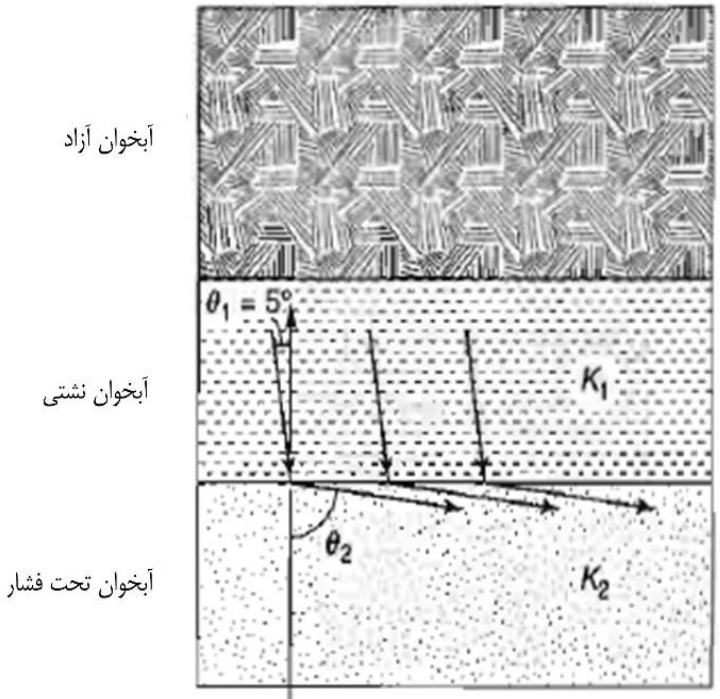
بنابراین برای جریان اشباع که از محیط با هدایت هیدرولیکی مشخص وارد محیط دیگری با هدایت هیدرولیکی متفاوت می‌شود، شکستی در خطوط جریان ایجاد می‌شود که نسبت K_s برابر است با نسبت تانژانت زاویه‌ای که خطوط جریان با مرز طبیعی جریان می‌سازد.



مفهوم شکست خط جریان را می توان هنگام عبور از لایه‌های ماسه‌ای درشت و ریزدانه با نسبت هدایت هیدرولیکی مشخص در شکل های زیر مشاهده نمود.



مثال) یک آبخوان محصور نشتی با هدایت هیدرولیکی افقی $4.5m/day$ زیر یک آبخوان کم‌تراوا با هدایت هیدرولیکی قائم $0.052m/day$ قرار گرفته است. اگر جریان در آبخوان کم‌تراوا در جهت پایین حرکت کند و با جهت قائم زاویه $5°$ بسازد، θ_2 را محاسبه کنید.

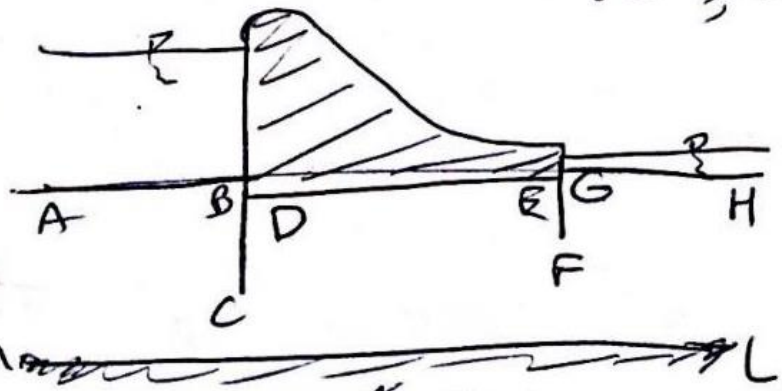


حل) با توجه به $K_1 = 0.052m/day, K_2 = 4.5m/day, \theta_1 = 5°$، معادله زیر جهت محاسبه θ_2 استفاده می‌شود:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{tan\,\theta_1}{tan\,\theta_2} \rightarrow \frac{0.052\,m/day}{4.5\,m/day} = \frac{tan(5°)}{tan\,\theta_2} \rightarrow \theta_2 = 82.5°$$

جریان وقتی وارد آبخوان محصور می‌شود، خطوط جریان به حالت افقی نزدیک می‌شود. این مورد به صورت کلی برای سیستم جریان مناطقی است که هدایت هیدرولیکی آبخوان محصور عمدتاً بزرگتر از هدایت هیدرولیکی لایه محصورکننده باشد.

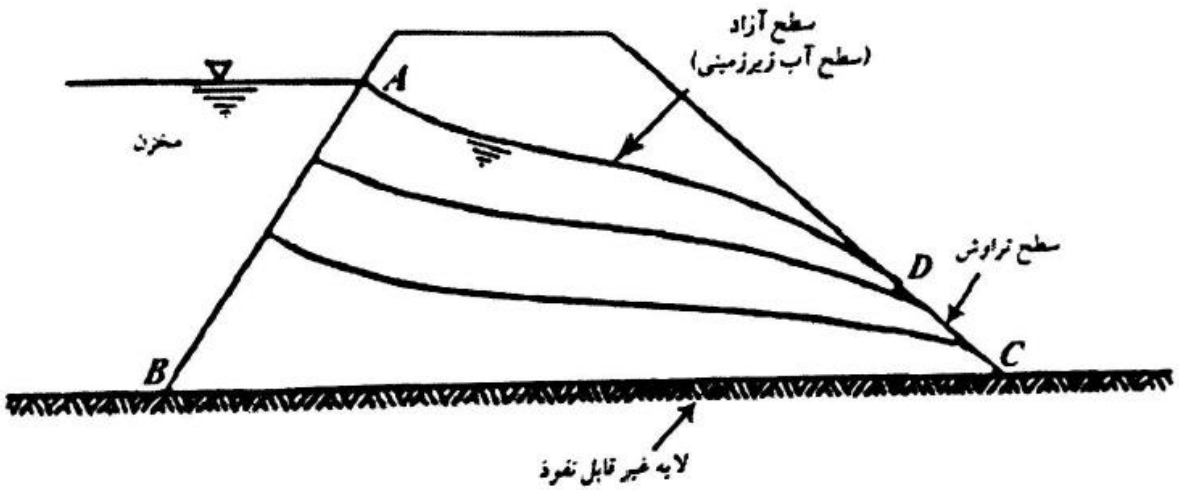
تحلیل جریان آب زیرزمینی (تئوری پتانسیل و شبکه های جریان)



سطح شبی (مرز غیر قابل تراوش)

ج) سطوح آزاد: در جریان آب در داخل خاکریزهای بزرگ و سدهای خاکی یا جریان آب در یک آبخوان باز، اگر حاشیه مؤیینگی صرفنظر شود، سطح آب زیرزمینی مرز فوقانی محیط اشباعی است که فشار وارد بر آن (فشار هوا) ثابت است. در جریان پایدار به شرط عدم تغذیه سطح آب زیرزمینی و تبخیر از آن، سطح آب زیرزمینی یک خط جریان است (خط AD).

در نفوذ عمقی آب از محیط غیراشباع به محیط اشباع، دیگر سطح آب زیرزمینی مرز فوقانی و خط جریان نبوده و خطوط جریان پس از رسیدن به سطح آب زیرزمینی، طبق قانون تانژانت شکسته شده و سپس وارد محیط اشباع می گردند (به دلیل تفاوت هدایت هیدرولیکی محیط اشباع و غیر اشباع)



د) سطح تراوش: سطح شیب دار جلوی سد (سطح DC) یک سطح تراوش است. این سطح، خط جریان نمی باشد چون تعداد زیادی خطوط جریان آن را قطع می کند و حال آنکه خطوط جریان همدیگر را قطع نمی کنند و خط هم پتانسیل نیز نمی باشد زیرا در امتداد آن بار هیدرولیکی ثابت نیست و با ارتفاع به صورت خطی افزایش می یابد و فشار روی این سطح (DC) برابر با فشار اتمسفر و صفر است.